Semantikk og konsekvens: Definisjoner og oppgaver

17. mars 2010

Det som står som definisjoner nedenfor er definisjonene fra forelesningene den 9. og 16. mars. Det som står angitt som teoremer er oppgaver. Oppgaven er å bevise teoremet. Vi anbefaler at dere gjør oppgavene fortløpende når dere leser igjennom dokumentet. De aller fleste er veldig enkle, og er ment som hjelpemiddel for å forstå og repetere definisjonene de står sammen med.
Hvis ikke annet er oppgitt så er alle definisjoner og oppgaver gitt med tanke på et gitt (dvs. vilkårlig, men fastlagt) språk, $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{L}$ har likhet (=) som et binært relasjonssymbol og at dette tolkes som likhet i alle modeller.

Definition 0.0.1 ($\mathcal{L}$-setning) En *setning* i $\mathcal{L}$, eller $\mathcal{L}$*-setning*, er en lukket formel i $\mathcal{L}$, dvs. en formel uten frie variable.

Videre i dette dokumentet vil vi ofte skrive "$\phi \in \mathcal{L}$" som forkortelse for "ϕ er en $\mathcal{L}$-setning". Merk at dette f.o.f. gjelder i dette dokumentet. Senere i kurset vil vi nok bruke denne forkortelsen for å si at ϕ er en (ikke nødvendigvis lukket) $\mathcal{L}$-formel, men her er vi mest opptatt av setninger.

Definition 0.0.2 (Semantisk implikasjon) Gitt en mengde $\mathcal{L}$-setninger, Γ, og en $\mathcal{L}$-setning, ϕ. Vi sier at ϕ er en *semantisk konsekvens* av Γ og at Γ *implisererer* ϕ semantisk, og skriver

$$\Gamma \vDash \phi$$

hvis følgende holder: For alle $\mathcal{L}$-modeller, $\mathcal{M}$, hvis alle setningene i Γ er sanne i $\mathcal{M}$ så er også ϕ sann i $\mathcal{M}$.

Theorem 0.0.3 *En $\mathcal{L}$-setning er gyldig, dvs. sann i alle modeller, hvis og bare hvis ϕ er en semantisk konsekvens av den tomme mengden av $\mathcal{L}$-setninger.*

Definition 0.0.4 (Teori og aksiom)

1. En *teori* er en mengde $\mathcal{L}$-setninger som er lukket under semantisk konsekvens. Dvs. en mengde, $\mathbb{T}$, er en teori hvis følgende holder: For alle $\mathcal{L}$-setninger, ϕ, så har vi at

$$\mathbb{T} \vDash \phi \Rightarrow \phi \in \mathbb{T}$$

2. For en mengde, Γ, av $\mathcal{L}$-setninger så sier vi at Γ definerer eller *aksiomatiserer* teorien som består av tillukningen av Γ under semantisk konsekvens. Vi skriver $\mathbb{T}_\Gamma$ for denne teorien, og den er altså definert som følger:

$$\mathbb{T}_\Gamma = \{\phi \in \mathcal{L} | \Gamma \vDash \phi\}$$

Theorem 0.0.5 *1.* $\Gamma \subseteq \mathbb{T}_\Gamma$

2. $\mathbb{T}_\Gamma$ *er lukket under semantisk konsekvens (dvs. at denne mengden er en teori, slik definisjonen over påstår).*

Husk at vi skriver "$\mathcal{M} \vDash \phi$" for "ϕ er sann i (modellen) $\mathcal{M}$.

Definition 0.0.6 (Teorien til en modell) Gitt en $\mathcal{L}$-modell, $\mathcal{M}$. *Teorien til* $\mathcal{M}$ skrives og defineres som følger:

$$\mathbb{T}(\mathcal{M}) = \{\phi \in \mathcal{L} | \mathcal{M} \vDash \phi\}$$

Theorem 0.0.7 *Gitt en $\mathcal{L}$-modell, $\mathcal{M}$. Da er $\mathbb{T}(\mathcal{M})$ lukket under semantisk konsekvens (dvs. at denne mengden er en teori, slik definisjonen over påstår).*

Definition 0.0.8 (Komplett teori) En mengde $\mathcal{L}$-setninger, Γ, er *komplett* hvis følgende holder: For alle $\mathcal{L}$-setninger, ϕ, så er enten ϕ eller $\neg\phi$ med i Γ.

Theorem 0.0.9 *1. Hvis Γ er en komplett mengde $\mathcal{L}$-setninger så er Γ en teori.*

2. Gitt en $\mathcal{L}$-modell, $\mathcal{M}$. Da er $\mathbb{T}(\mathcal{M})$ komplett.

Definition 0.0.10 (Teorien til en klasse modeller) Gitt en klasse, $\mathbf{X}$, av $\mathcal{L}$-modeller. *Teorien til* $\mathbf{X}$ skrives og defineres som følger:

$$\mathbb{T}(\mathbf{X}) = \{\phi \in \mathcal{L} | \mathcal{M} \vDash \phi \text{ for alle } \mathcal{M} \in \mathbf{X}\}$$

Theorem 0.0.11 *1. $\mathbb{T}(\mathbf{X})$ er lukket under semantisk konsekvens (dvs. at denne mengden er en teori, slik definisjonen over påstår).*

2. Det finnes en klasse, $\mathbf{X}$, slik at $\mathbb{T}(\mathbf{X})$ ikke er komplett.

3. Det finnes en klasse, $\mathbf{X}$, slik at $\mathbb{T}(\mathbf{X})$ er komplett.

Definition 0.0.12 (Elementær klasse) Gitt en mengde, Γ, av $\mathcal{L}$-setninger. Klassen av alle $\mathcal{L}$-modeller som gjør alle setningene i Γ sanne er et eksempel på en såkalt *elementær klasse* (fordi den er definert av en mengde førsteordens setninger, ordet "elementær" henviser ofte til førsteordens logikk), og skrives

$$\mathrm{Mod}(\Gamma) = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \text{ er en } \mathcal{L}\text{-modell, og } \mathcal{M} \vDash \phi \text{ for alle } \phi \in \Gamma\}$$

Theorem 0.0.13 $\mathrm{Mod}(\Gamma) = \mathrm{Mod}(\mathbb{T}_\Gamma)$.

Definition 0.0.14 Vi skriver $\mathcal{M} \vDash \Gamma$ hvis $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\Gamma)$

Definition 0.0.15 (Elementær ekvivalens) To $\mathcal{L}$-modeller, $\mathcal{M}$ og $\mathcal{N}$, kalles *elementært ekvivalente*, og vi skriver

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$$

hvis $\mathbb{T}(\mathcal{M}) = \mathbb{T}(\mathcal{N})$, dvs. hvis

$$\mathcal{M} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \phi$$

for alle $\mathcal{L}$-setninger ϕ.

Definition 0.0.16 (Isomorfi) Gitt to $\mathcal{L}$-modeller, $\mathcal{M}$ og $\mathcal{N}$, og en funksjon $F : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ fra domenet til $\mathcal{M}$ til domenet til $\mathcal{N}$. Vi sier at F er en *isomorfi* hvis følgende holder:

1. F er en bijeksjon, dvs. 1-1 og på.
2. $F(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ for alle konstantsymboler, c, i $\mathcal{L}$.
3. $F(f^{\mathcal{M}}(m_1, \ldots, m_k)) = f^{\mathcal{N}}(F(m_1), \ldots, F(m_k))$ for alle funksjonssymboler, $f(x_1, \ldots, x_k)$ i $\mathcal{L}$ og alle argumenter $(m_1, \ldots, m_k) \in |\mathcal{M}|^k$.
4. $\mathcal{M} \vDash R(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_k}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash R(\overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_k)})$

Vi sier at $\mathcal{M}$ og $\mathcal{N}$ er *isomorfe*, og skriver

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$$

hvis det finnes en funksjon fra domenet til $\mathcal{M}$ til domenet til $\mathcal{N}$ som er en isomorfi.

Theorem 0.0.17 *Gitt to $\mathcal{L}$-modeller, $\mathcal{M}$ og $\mathcal{N}$, og en funksjon $F : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ fra domenet til $\mathcal{M}$ til domenet til $\mathcal{N}$. Anta at F er en isomorfi. Da har F en invers funskjon, $F^{-1} : |\mathcal{N}| \to |\mathcal{M}|$, og F^{-1} er også en isomorfi. (Dvs. at $\mathcal{M} \cong \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N} \cong \mathcal{M}$.)*

Følgende oppgave er mer krevende enn de andre, i hvert fall i den forstand at den krever endel arbeid.

Theorem 0.0.18 *Gitt to $\mathcal{L}$-modeller, $\mathcal{M}$ og $\mathcal{N}$. Da har vi at*

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$$

(Hint: Bruk strukturell induksjon. Først paa termene i $\mathcal{L}$ for å vise at $F(t^{\mathcal{M}}) = t^{\mathcal{N}}$). Deretter på formlene i $\mathcal{L}$ for å vise at $\mathcal{M} \vDash \phi(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_k}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \phi(\overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_k)})$. Dette er en veldig nyttig oppgave, men den er ganske drøy. Hvis du vil gjøre det enklere for deg kan du anta at $\mathcal{L}$ ikke har konstant- eller funksjonssymboler og hoppe over induksjonen på termene.)

Definition 0.0.19 (Oppfyllbarhet) En mengde, Γ, av $\mathcal{L}$-setninger er *oppfyllbar* hvis det finnes en $\mathcal{L}$-modell som gjør alle setningene i Γ sanne, dvs. hvis

$$\mathrm{Mod}(\Gamma) \neq \emptyset$$

Theorem 0.0.20

1. *Γ er oppfyllbar hvis og bare hvis $\mathbb{T}_\Gamma$ er oppfyllbar.*
2. *Γ er ikke oppfyllbar hvis og bare hvis $\Gamma \vDash \phi$ for alle $\mathcal{L}$-setninger ϕ.*