Oppgavesett 5X - Semantikk

6. april 2010

Vi anbefaler at dere gjør så mye dere rekker av følgende til forelesningen den niende mars. Bare kom og spør om hjelp eller forklaringer til kontor 3306. Åpen dør-politikk gjelder (særlig på ettermiddagen). Om ønskelig kan noe eller alt gjennomgås i en forelesning. Si fra i så fall.
Anta i følgende oppgaver at likhet (=) alltid tolkes som likhet.

1. La $\mathcal{L}$ være følgende språk:

$$\langle Kai, Linn; FAR(x); BRORTIL(x, y), =\rangle$$

   (a) Les Kai og $Linn$ som navn på personer, FAR som funksjonen som sender en person til hennes/hans far og $BRORTIL$ som relasjonen "er bror til", og skriv følgende setninger som (lukkete) formler i $\mathcal{L}$:
      (i) Kai er bror til Linn.
      (ii) Kai og Linn er forskjellige personer.
      (iii) Alle har en far.
      (iv) Kai er ikke far.
      (v) Alle unntatt Kai er far.

   (b) Skriv følgende $\mathcal{L}$-formler om til vanlig norsk (med samme lesning som i (a))
      i. $Kai = FAR(Linn)$
      ii. $\forall x(\forall y(BRORTIL(x, y) \rightarrow FAR(x) = FAR(y)))$
      iii. $\exists x(\exists y(\neg(FAR(x) = FAR(y)) \wedge (BRORTIL(x, y))))$

2. Vis at alle $\mathcal{L}$-formlene i oppgave 1 (både de du selv skrev i (a) og de som er gitt i (b)) er både oppfyllbare og falsifiserbare. Det vil si at for hver formel må du spesifisere en modell som gjør formelen sann og en som gjør den falsk (det er selvsagt lov å spare tid ved å bruke samme modell flere ganger).

3. La $\mathcal{L}'$ være følgende språk for aritmetikk:

$$\langle \hat{0}, \hat{1}; s(x); \hat{\leq}(x, y), =\rangle$$

Når vi sier at $\mathcal{L}'$ er "et språk for aritmetikk" så er det fordi vi har følgende standardmodell $\mathcal{M}$:

$$|\mathcal{M}| = \mathbb{N}$$
$$\hat{0}^{\mathcal{M}} = 0$$
$$\hat{1}^{\mathcal{M}} = 1$$
$$s^{\mathcal{M}}(n) = n + 1, \text{ for alle naturlige tall } n$$
$$\hat{\leq}^{\mathcal{M}}(n, m) \text{ hvis og bare hvis } n \leq m, \text{ for alle naturlige tall } n, m$$

Noter nå at $\mathcal{L}$ og $\mathcal{L}'$ egentlig er samme språk, i den forstand at de begge har to konstantsymboler, ett funksjonssymbol med aritet 1 og ett relasjonssymbol med aritet 2 (og likhet). Dermed kan vi oversette $\mathcal{L}$ direkte til $\mathcal{L}'$ og vice versa. Dette gjør at $\mathcal{M}$ også er en $\mathcal{L}$-modell (som vi også kan kalle $\mathcal{M}$).

(a) Skriv ut $\mathcal{M}$ som en modell av $\mathcal{L}$, d.v.s. skriv opp tolkningen av de ikke-logiske symbolene i $\mathcal{L}$ (Kai, $Linn$, etc.) i denne modellen.

(b) Hvilke av $\mathcal{L}$-formlene i oppgave 1 (både de du selv skrev i (a) og de som er gitt i (b)) er sanne i $\mathcal{M}$?

4. La $\mathcal{L}^=$ være språket gitt ved $\langle ; ; = \rangle$, altså som kun har likhet som ikke-logisk symbol. Anta at vi alltid tolker dette symbolet som likhet og

   (a) skriv en (lukket) formel ϕ i $\mathcal{L}^=$ slik at for alle modeller $\mathcal{M}$ så er ϕ sann i $\mathcal{M}$ hvis og bare hvis domenet $|\mathcal{M}|$ har nøyaktig ett element,

   (b) skriv en (lukket) formel ϕ i $\mathcal{L}^=$ slik at for alle modeller $\mathcal{M}$ så er ϕ sann i $\mathcal{M}$ hvis og bare hvis domenet $|\mathcal{M}|$ har minst to elementer,

   (c) skriv en (lukket) formel ϕ i $\mathcal{L}^=$ slik at for alle modeller $\mathcal{M}$ så er ϕ sann i $\mathcal{M}$ hvis og bare hvis domenet $|\mathcal{M}|$ har nøyaktig to elementer.