# Løsningsforslag Oppgave 18

6. april 2010

Det kan være greit å ha denne definisjonen foran seg.

**Definition 0.0.1 (Isomorfi)** Gitt to $\mathcal{L}$-modeller, $\mathcal{M}$ og $\mathcal{N}$, og en funksjon $F : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ fra domenet til $\mathcal{M}$ til domenet til $\mathcal{N}$. Vi sier at $F$ er en *isomorfi* hvis følgende holder:

1. $F$ er en bijeksjon, dvs. 1-1 og på.
2. $F(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ for alle konstantsymboler, $c$, i $\mathcal{L}$.
3. $F(f^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k)) = f^{\mathcal{N}}(F(m_1), \dots, F(m_k))$ for alle funksjonssymboler, $f(x_1, \dots, x_k)$ i $\mathcal{L}$ og alle argumenter $(m_1, \dots, m_k) \in |\mathcal{M}|^k$.
4. $\mathcal{M} \vDash R(\overline{m_1}, \dots, \overline{m_k}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash R(\overline{F(m_1)}, \dots, \overline{F(m_k)})$

Vi sier at $\mathcal{M}$ og $\mathcal{N}$ er *isomorfe*, og skriver

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$$

hvis det finnes en funksjon fra domenet til $\mathcal{M}$ til domenet til $\mathcal{N}$ som er en isomorfi.

**Theorem 0.0.2** *Gitt to $\mathcal{L}$-modeller, $\mathcal{M}$ og $\mathcal{N}$. Da har vi at*

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$$

Proof Siden $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ så finnes det, og da kan vi velge oss, en isomorfi $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Så må vi vise at for enhver setning $\phi$ i $\mathcal{L}$ så har vi at

$$\mathcal{M} \vDash \psi \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \psi$$

Vi bruker induksjon på formlene i $\mathcal{L}$ for å vise at

$$\mathcal{M} \vDash \phi(\overline{m_1}, \dots, \overline{m_k}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \phi(\overline{F(m_1)}, \dots, \overline{F(m_k)}) \tag{1}$$

som det følger av (ikke sant?). Husk at basistilfellet, en såkalt *atomær* formel, er av typen $R(t_1, \dots, t_n)$, der $R$ er et relasjonssymbol med aritet $n$ og $t_1, \dots, t_n$ er $n$ termer som kan ha frie variable i seg. Derfor trenger vi først en induksjon på termer for å vise følgende: For enhver term $t(x_1, \ldots, x_n)$ med frie variable som vist, så har vi at

$$F(t^{\mathcal{M}}(m_1, \ldots, m_n)) = t^{\mathcal{N}}(F(m_1), \ldots, F(m_n)) \tag{2}$$

Husk at mendgen termer er definert ved at ethvert konstantsymbol er en term, enhver variabel er en term, og hvis $f$ er et funksjonssymbol med aritet $n$ og $t_1, \ldots, t_n$ er termer så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ en term. Da får vi følgende induksjon:

**Basistilfelle:** For et konstantsymbol, $c$, i $\mathcal{L}$: Ariteten er null, så vi må vise at $F(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$. Men dette er punkt 2 i definisjonen av isomorfi. For en variabel, $x$: Ariteten er én, så da blir det å vise at for et hvilket som helst element $m \in \mathcal{M}$ så har vi at $F(m) = F(m)$, som er selvinlysende.

**Induksjonssteg:** Gitt et funksjonssymbol $f$ i $\mathcal{L}$ med aritet $n$ og $n$ termer $t_1(x_{1_1}, \ldots, x_{1_{k_1}}), \ldots, t_n(x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k_n}})$ med frie variable som vist. Induksjonshypotesen er at ligningen (2) holder for termene $t_1, \ldots, t_n$. For elementer $m_{1_1}, \ldots, m_{1_{k_1}}, \ldots, m_{n_1}, \ldots, m_{n_{k_n}}$ i (domenet til) $\mathcal{M}$ må vi vise at

$$\begin{aligned}
&F(f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(m_{1_1}, \ldots, m_{1_{k_1}}), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(m_{n_1}, \ldots, m_{n_{k_n}})))\\
&= f^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(F(m_{1_1}), \ldots, F(m_{1_{k_1}})), \ldots, t_n^{\mathcal{N}}(F(m_{n_1}), \ldots, F(m_{n_{k_n}})))
\end{aligned}$$

(her er det, litt slurvete, underforstått av listen av elementer må passe til listen av variable, altså at hvis noen av variablene er identiske så må tilsvarende elementer også være det). Ved å bruke først punkt 3 i definisjonen av isomofi og deretter induksjonshypotesen får vi:

$$\begin{aligned}
&F(f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(m_{1_1}, \ldots, m_{1_{k_1}}), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(m_{n_1}, \ldots, m_{n_{k_n}})))\\
&= f^{\mathcal{N}}(F(t_1^{\mathcal{M}}(m_{1_1}, \ldots, m_{1_{k_1}})), \ldots, F(t_n^{\mathcal{M}}(m_{n_1}, \ldots, m_{n_{k_n}})))\\
&= f^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(F(m_{1_1}), \ldots, F(m_{1_{k_1}})), \ldots, t_n^{\mathcal{N}}(F(m_{n_1}), \ldots, F(m_{n_{k_n}})))
\end{aligned}$$

Dette avslutter induksjonsbeviset for termer. Vi kan nå begynne på induksjonsbeviset for formler, som altså skal vise at

$$\mathcal{M} \models \phi(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_k}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_k)})$$

Formler er bygd opp av $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow, \forall$ og $\exists$ og vi får følgende induksjon:

**Basistilfelle:** For et relasjonssymbol, $R$, i $\mathcal{L}$ med aritet $n$ termer $t_1(x_{1_1}, \ldots, x_{1_{k_1}}), \ldots, t_n(x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k_n}})$ med frie variable som vist. For elementer $m_{1_1}, \ldots, m_{1_{k_1}}, \ldots, m_{n_1}, \ldots, m_{n_{k_n}}$ i (domenet til) $\mathcal{M}$ må vi vise at

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models R(t_1(\overline{m_{1_1}}, \ldots, \overline{m_{1_{k_1}}}), \ldots, t_n(\overline{m_{n_1}}, \ldots, \overline{m_{n_{k_n}}}))\\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \models R(t_1(\overline{F(m_{1_1})}, \ldots, \overline{F(m_{1_{k_1}})}), \ldots, t_n(\overline{F(m_{n_1})}, \ldots, \overline{F(m_{n_{k_n}})}))
\end{aligned}$$

Vi bruker ligningen (2) over, punkt 4 i definisjonen av en isomorfi og definisjonen av sannhet i en modell. Da har vi at:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash R(t_1(\overline{m_{1_1}}, \ldots, \overline{m_{1_{k_1}}}), \ldots, t_n(\overline{m_{n_1}}, \ldots, \overline{m_{n_{k_n}}}))\\
&\Leftrightarrow \langle t_1^{\mathcal{M}}(m_{1_1}, \ldots, m_{1_{k_1}}), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(m_{n_1}, \ldots, m_{n_{k_n}})\rangle \in R^{\mathcal{M}}\\
&\Leftrightarrow \langle F(t_1^{\mathcal{M}}(m_{1_1}, \ldots, m_{1_{k_1}})), \ldots, F(t_n(m_{n_1}, \ldots, m_{n_{k_n}}))\rangle \in R^{\mathcal{N}}\\
&\Leftrightarrow \langle t_1^{\mathcal{N}}(F(m_{1_1}), \ldots, F(m_{1_{k_1}})), \ldots, t_n(F(m_{n_1}), \ldots, F(m_{n_{k_n}}))\rangle \in R^{\mathcal{N}}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash R(t_1(\overline{F(m_{1_1})}, \ldots, \overline{F(m_{1_{k_1}})}), \ldots, t_n(\overline{F(m_{n_1})}, \ldots, \overline{F(m_{n_{k_n}})}))
\end{aligned}
$$

**Induksjonssteg:**

- Med induksjonshypotesen at (1) holder for $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ viser vi at (1) også holder for $\neg\phi(x_1, \ldots, x_n)$ som følger: Gitt elementer $m_1, \ldots, m_n$ i (domenet til) $\mathcal{M}$ så har vi at

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \vDash \neg\phi(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_k}) &\Leftrightarrow \mathcal{M} \nvDash \phi(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_k})\\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \nvDash \phi(\overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_n)})\\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \neg\phi(\overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_n)})
\end{aligned}
$$

- Med induksjonshypotesen at (1) holder for $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ og $\psi(y_1, \ldots, y_k)$ (her er det mulig at noen av variablene i $\phi$ og $\psi$ er de samme) viser vi at (1) også holder for $\phi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi(y_1, \ldots, y_k)$ som følger: Gitt (en passende liste av) elementer $m_1, \ldots, m_{n+k}$ i (domenet til) $\mathcal{M}$ så har vi at

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash \phi(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n}) \wedge \psi(\overline{m_{1+n}}, \ldots, \overline{m_{k+n}})\\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \phi(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n}) \text{ og } \mathcal{M} \vDash \psi(\overline{m_{1+n}}, \ldots, \overline{m_{k+n}})\\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \phi(\overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_k)}) \text{ og } \mathcal{N} \vDash \psi(\overline{F(m_{1+n})}, \ldots, \overline{F(m_{k+n})})\\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \phi(\overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_k)}) \wedge \psi(\overline{F(m_{1+n})}, \ldots, \overline{F(m_{k+n})})
\end{aligned}
$$

- Med induksjonshypotesen at (1) holder for $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ og $\psi(y_1, \ldots, y_k)$ viser vi at (1) også holder for $\phi(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi(y_1, \ldots, y_k)$ og $\phi(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \psi(y_1, \ldots, y_k)$ på samme måte som over, med de nødvendige justeringene, så det overlates til leseren.
- Med induksjonshypotesen at (1) holder for $\phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ viser vi at (1) også holder for $\exists y(\phi(y, x_1, \ldots, x_n))$ som følger: Gitt elementer $m_1, \ldots, m_n$ i (domenet til) $\mathcal{M}$ så har vi at

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash \exists y(\phi(y, \overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n}))\\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \phi(\overline{a}, \overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n}) \text{ for (minst) et element, } a, \text{ i domenet til } \mathcal{M}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \phi(\overline{b}, \overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_k)}) \text{ for (minst) et element, } b, \text{ i domenet til } \mathcal{N}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \exists y(\phi(y, \overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_k)}))
\end{aligned}
$$

(For ekvivalensen mellom linje to og tre, ovenfra og ned: Sett $b = F(a)$ og bruk induksjonshypotesen. Nedenfra og opp: Sett $a$ til å være det unike elementet som $F$ sender til $b$ og bruk induksjonshypotesen.)

- Med induksjonshypotesen at (1) holder for $\phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ viser vi at (1) også holder for $\forall y(\phi(y, x_1, \ldots, x_n))$ som følger: Gitt elementer $m_1, \ldots, m_n$ i (domenet til) $\mathcal{M}$ så har vi at

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash \forall y(\phi(y, \overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n})) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \phi(\overline{a}, \overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n}) \text{ for alle elementer, } a, \text{ i domenet til } \mathcal{M} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \phi(\overline{b}, \overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_k)}) \text{ for alle elementer, } b, \text{ i domenet til } \mathcal{N} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \forall y(\phi(y, \overline{F(m_1)}, \ldots, \overline{F(m_k)}))
\end{aligned}$$

(For ekvivalensen mellom linje to og tre, ovenfra og ned: For en vilkårlig $b$ i domenet til $\mathcal{N}$ så fins det en $a$ i domenet til $\mathcal{M}$ slik at $b = F(a)$, og så bruker vi induksjonshypotesen. Nedenfra og opp: For en vilkårlig $a$ i domenet til $\mathcal{M}$, bruk $F$ på $a$ og bruk induksjonshypotesen.)

QED $\dashv$