INF3170 – Logikk

Forelesning 10: Fri-variabel sekventkalkyle

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

20. april 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-27 11:38)

Fri-variabel sekventkalkyle

Fri-variabel sekventkalkyle

- Introduksjon
- Substitusjoner
- Unifisering
- Rask repetisjon
- Utvidet språk
- Fri-variabel sekventkalkyle
- Semantikk
- Sunnhet
- Kompletthet

Introduksjon

Introduksjon

- Kalkylene i seg selv sier ingenting om hvordan man finner bevis for gyldige sekventer.

Introduksjon

- Kalkylene i seg selv sier ingenting om hvordan man finner bevis for gyldige sekventer.
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.

Introduksjon

- Kalkylene i seg selv sier ingenting om hvordan man finner bevis for gyldige sekventer.
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.
- Det er ikke så lett å lage effektive søkealgoritmer for grunn sekventkalkyle.

Introduksjon

- Kalkylene i seg selv sier ingenting om hvordan man finner bevis for gyldige sekventer.
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.
- Det er ikke så lett å lage effektive søkealgoritmer for grunn sekventkalkyle.
- Vi skal i dag se litt på *fri-variabel sekventkalkyle*, som egner seg bedre for automatisk bevissøk.

Introduksjon

- Kalkylene i seg selv sier ingenting om hvordan man finner bevis for gyldige sekventer.
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.
- Det er ikke så lett å lage effektive søkealgoritmer for grunn sekventkalkyle.
- Vi skal i dag se litt på *fri-variabel sekventkalkyle*, som egner seg bedre for automatisk bevissøk.
- Vi kan motivere dette ved å se på γ-reglene.

Introduksjon

- Kalkylene i seg selv sier ingenting om hvordan man finner bevis for gyldige sekventer.
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.
- Det er ikke så lett å lage effektive søkealgoritmer for grunn sekventkalkyle.
- Vi skal i dag se litt på *fri-variabel sekventkalkyle*, som egner seg bedre for automatisk bevissøk.
- Vi kan motivere dette ved å se på γ-reglene.

  (Se forelesningsnotatene fra 2007 for langversjonen av denne forelesningen.)

Viktigheten av γ-reglene

Viktigheten av γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

Viktigheten av γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

Viktigheten av γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi} \ \mathsf{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x.

Viktigheten av γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi}\,\mathsf{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x.
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ-formel med alle termene i Herbranduniverset.

Viktigheten av γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi} \mathsf{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x.
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ-formel med alle termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ-formlene i denne rekkefølgen.

Viktigheten av γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x.
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ-formel med alle termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ-formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å finne bevis så tidlig som mulig?

Viktigheten av γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \;\vdash\; \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \;\vdash\; \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \;\vdash\; \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \;\vdash\; \Delta, \exists x \varphi}\,\mathsf{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x.
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ-formel med alle termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ-formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å finne bevis så tidlig som mulig?

$$\forall x Px \;\vdash\; Pfffa, Qga$$

Viktigheten av γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi} \mathsf{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x.
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ-formel med alle termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ-formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å finne bevis så tidlig som mulig?

$$\underset{1}{a}, \underset{2}{fa}, \underset{3}{ga}, \underset{4}{ffa}, \underset{5}{fga}, \ldots, \underset{i}{fffa}, \ldots$$

$$\forall x Px \vdash Pfffa, Qga$$

Viktigheten av γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x.
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ-formel med alle termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ-formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å finne bevis så tidlig som mulig?

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pa, \ldots, Pfffa \vdash Pfffa, Qga}{\vdots}}{\forall x Px, Pa \vdash Pfffa, Qga}}{\forall x Px \vdash Pfffa, Qga}$$

$$\underset{1}{a}, \underset{2}{fa}, \underset{3}{ga}, \underset{4}{ffa}, \underset{5}{fga}, \ldots, \underset{i}{fffa}, \ldots$$

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn frie variable:

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn frie variable:

$$\forall x Px \;\vdash\; Pa \land Pb$$

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn frie variable:

$$\frac{\forall x Px \ \vdash \ Pa \qquad \forall x Px \ \vdash \ Pb}{\forall x Px \ \vdash \ Pa \land Pb}$$

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn frie variable:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ Pa}{\forall x Px \ \vdash \ Pa} \qquad \forall x Px \ \vdash \ Pb}{\forall x Px \ \vdash \ Pa \land Pb}$$

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn frie variable:

$$
\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ Pa}{\forall x Px \ \vdash \ Pa} \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \ \vdash \ Pb}{\forall x Px \ \vdash \ Pb}}{\forall x Px \ \vdash \ Pa \wedge Pb}
$$

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn frie variable:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} a/u \\[6pt] \forall x Px, Pu \ \vdash \ Pa \end{array}}{\forall x Px \ \vdash \ Pa} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} b/v \\[6pt] \forall x Px, Pv \ \vdash \ Pb \end{array}}{\forall x Px \ \vdash \ Pb}}{\forall x Px \ \vdash \ Pa \land Pb}$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn frie variable:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{a/u}{\forall x Px, Pu \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{b/v}{\forall x Px, Pv \vdash Pb}}{\forall x Px \vdash Pb}}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}
$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.
- Hvilke substitusjoner vi kan anvende på løvnoder med frie variable slik at de blir aksiomer?

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn frie variable:

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{a/u}{\forall x Px, Pu \;\vdash\; Pa}}{\forall x Px \;\vdash\; Pa} \qquad \dfrac{\overset{b/v}{\forall x Px, Pv \;\vdash\; Pb}}{\forall x Px \;\vdash\; Pb}}{\forall x Px \;\vdash\; Pa \land Pb}
$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.
- Hvilke substitusjoner vi kan anvende på løvnoder med frie variable slik at de blir aksiomer?
- Problemet kan løses med unifiseringsalgoritmer.

Hva med δ-reglene

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\forall x \exists y Lxy \ \vdash \ \exists x \forall y Lyx$$

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\frac{\exists y Luy \ \vdash \ \forall y Lyv}{\forall x \exists y Lxy \ \vdash \ \exists x \forall y Lyx}$$

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\dfrac{\dfrac{Lua \vdash Lbv}{\exists y Luy \vdash \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$b/u, a/v$$

$$\dfrac{\dfrac{Lua \vdash Lbv}{\exists y Luy \vdash \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$b/u,\ a/v$$

$$\dfrac{\dfrac{Lua \ \vdash\ Lbv}{\exists y Luy \ \vdash\ \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \ \vdash\ \exists x \forall y Lyx}$$

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$b/u,\, a/v$$

$$\dfrac{\dfrac{Lua \vdash Lbv}{\exists y Luy \vdash \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en Skolemterm:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$b/u,\ a/v$$

$$\begin{array}{c}
Lua \vdash Lbv \\
\hline
\exists y Luy \vdash \forall y Lyv \\
\hline
\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx
\end{array}$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en Skolemterm:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en Skolemfunksjon

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\begin{array}{c} b/u, a/v \\[1em] \dfrac{\dfrac{Lua \vdash Lbv}{\exists y Luy \vdash \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx} \end{array}$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en Skolemterm:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en Skolemfunksjon, og $u_1, \ldots, u_n$ er alle variablene som forekommer fritt i δ-formelen.

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c} b/u,\, a/v \\[1em] Lua \;\vdash\; Lbv \end{array}}{\exists y Luy \;\vdash\; \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \;\vdash\; \exists x \forall y Lyx} \qquad\qquad \forall x \exists y Lxy \;\vdash\; \exists x \forall y Lyx$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en Skolemterm:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en Skolemfunksjon, og $u_1, \ldots, u_n$ er alle variablene som forekommer fritt i δ-formelen.

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$b/u,\ a/v$$

$$\dfrac{\dfrac{Lua \ \vdash\ Lbv}{\exists y Luy \ \vdash\ \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \ \vdash\ \exists x \forall y Lyx}
\qquad\qquad
\dfrac{\exists y Luy \ \vdash\ \forall y Lyv}{\forall x \exists y Lxy \ \vdash\ \exists x \forall y Lyx}$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en Skolemterm:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en Skolemfunksjon, og $u_1, \ldots, u_n$ er alle variablene som forekommer fritt i δ-formelen.

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\xcancel{\begin{array}{c} b/u,\ a/v \\[6pt] Lua \ \vdash \ Lbv \\ \hline \exists y Luy \ \vdash \ \forall y Lyv \\ \hline \forall x \exists y Lxy \ \vdash \ \exists x \forall y Lyx \end{array}} \qquad \begin{array}{c} Luf(u) \ \vdash \ Lg(v)v \\ \hline \exists y Luy \ \vdash \ \forall y Lyv \\ \hline \forall x \exists y Lxy \ \vdash \ \exists x \forall y Lyx \end{array}$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en Skolemterm:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en Skolemfunksjon, og $u_1, \ldots, u_n$ er alle variablene som forekommer fritt i δ-formelen.

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$
\begin{array}{c}
b/u,\ a/v \\[1ex]
\dfrac{\dfrac{Lua \ \vdash \ Lbv}{\exists y Luy \ \vdash \ \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \ \vdash \ \exists x \forall y Lyx}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\text{kan ikke lukkes} \\[1ex]
\dfrac{\dfrac{Luf(u) \ \vdash \ Lg(v)v}{\exists y Luy \ \vdash \ \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \ \vdash \ \exists x \forall y Lyx}
\end{array}
$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en Skolemterm:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en Skolemfunksjon, og $u_1, \ldots, u_n$ er alle variablene som forekommer fritt i δ-formelen.

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\begin{array}{c} b/u,\ a/v \\[1ex] \dfrac{\dfrac{Lua \ \vdash\ Lbv}{\exists y Luy \ \vdash\ \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \ \vdash\ \exists x \forall y Lyx} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{kan ikke lukkes} \\[1ex] \dfrac{\dfrac{Luf(u) \ \vdash\ Lg(v)v}{\exists y Luy \ \vdash\ \forall y Lyv}}{\forall x \exists y Lxy \ \vdash\ \exists x \forall y Lyx} \end{array}$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en Skolemterm:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en Skolemfunksjon, og $u_1, \ldots, u_n$ er alle variablene som forekommer fritt i δ-formelen.
- På den måten sikrer vi at termen introdusert av δ-regelen er ny uansett hva slags verdi vi velger å instansiere de frie variablene med.

Substitusjoner

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s.

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s.
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer samtidig.

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s.
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer samtidig.
- Vi skal nå definere en bestemt type funksjoner – substitusjoner – som generaliserer én-variabel substitusjon til flere variable.

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s.
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer samtidig.
- Vi skal nå definere en bestemt type funksjoner – substitusjoner – som generaliserer én-variabel substitusjon til flere variable.
- Notasjon: Når vi anvender en substitusjon σ på en formel φ eller en term t skriver vi $\varphi\sigma$ eller $t\sigma$ istedenfor $\sigma(\varphi)/\sigma(t)$.

Definisjon (Substitusjon)

Definisjon (Substitusjon)

En substitusjon er en funksjon σ fra mengden variable $\mathcal{V}$

Definisjon (Substitusjon)

En substitusjon er en funksjon σ fra mengden variable $\mathcal{V}$ til mengden av termer $\mathcal{T}$ i et gitt førsteordens språk.

Definisjon (Substitusjon)

En substitusjon er en funksjon σ fra mengden variable $\mathcal{V}$ til mengden av termer $\mathcal{T}$ i et gitt førsteordens språk.

- Støtten (support) eller støttemengden (support set) til σ er mengden av variable x slik at $x\sigma \neq x$.

Definisjon (Substitusjon)

En substitusjon er en funksjon σ fra mengden variable $\mathcal{V}$ til mengden av termer $\mathcal{T}$ i et gitt førsteordens språk.

- Støtten (support) eller støttemengden (support set) til σ er mengden av variable x slik at $x\sigma \neq x$.
- σ er grunn dersom $x\sigma$ er en lukket term for alle variable x i støttemengden til σ.

Notasjon

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \ldots, x_n\}$

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \ldots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \ldots, x_n\sigma = t_n$

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \ldots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \ldots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$$

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \ldots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \ldots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$$

- Substitusjonen ϵ slik at $x\epsilon = x$ for alle variable x kalles identitetssubstitusjonen.

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \ldots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \ldots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$$

- Substitusjonen ϵ slik at $x\epsilon = x$ for alle variable x kalles identitetssubstitusjonen.
- Identitetssubstitusjonen kan skrives $\{\}$ siden den har tom støttemengde.

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$\tau = \{a/y, fx/z\}$

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$\tau = \{a/y, fx/z\}$

- er en substitusjon slik at

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$\tau = \{a/y, fx/z\}$

- er en substitusjon slik at
  - $y\sigma = a$

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$\tau = \{a/y, fx/z\}$

- er en substitusjon slik at
  - $y\sigma = a$
  - $z\sigma = fx$

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$\tau = \{a/y, fx/z\}$

- er en substitusjon slik at
  - $y\sigma = a$
  - $z\sigma = fx$
  - $v\sigma = v$ for alle andre variable

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$\tau = \{a/y, fx/z\}$

- er en substitusjon slik at
  - $y\sigma = a$
  - $z\sigma = fx$
  - $v\sigma = v$ for alle andre variable
- er ikke en grunn substitusjon

Substitusjon på termer

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau = y$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau = y$
- $f(x, y)\tau$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau = y$
- $f(x, y)\tau = f(y, x)$

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner ikke skal endre bundne variable.

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner ikke skal endre bundne variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner ikke skal endre bundne variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma$.

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner ikke skal endre bundne variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \to Qy)\sigma$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner ikke skal endre bundne variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma = \forall x Px \rightarrow Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon)

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner ikke skal endre bundne variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \to Qy)\sigma = \forall x Px \to Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon)

La σ være en substitusjon.

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner ikke skal endre bundne variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma = \forall x Px \rightarrow Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon)

La σ være en substitusjon. Substitusjonen σ begrenset på x, skrevet σ_x, er definert slik at

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner ikke skal endre bundne variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma = \forall x Px \rightarrow Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon)

La σ være en substitusjon. Substitusjonen σ begrenset på x, skrevet σ_x, er definert slik at

$$y\sigma_x = \begin{cases} y & \text{hvis } y = x \\ y\sigma & \text{ellers} \end{cases}$$

for enhver variabel y.

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $(Qx\psi)\sigma$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\land, \lor, \to\}$
4. $(Qx\psi)\sigma = Qx(\psi\sigma_x)$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $(Qx\psi)\sigma = Qx(\psi\sigma_x)$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

- Vi antar, som tidligere, at ingen variable blir bundet som resultat av å anvende en substitusjon.

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $(Qx\psi)\sigma = Qx(\psi\sigma_x)$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

- Vi antar, som tidligere, at ingen variable blir bundet som resultat av å anvende en substitusjon.
- Dette kan vi unngå ved å omdøpe bundne variable.

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- σ_x

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- σ_y

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{\cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- σ_z

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{\cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z}\}$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z} \}$
- $P(x, y)\sigma$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{\cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z}\}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{\cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z}\}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{\cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z}\}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma = \forall x(P(x, y)\sigma_x) = \forall x P(x, a)$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{\cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z}\}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma = \forall x(P(x, y)\sigma_x) = \forall x P(x, a)$
- $\exists z(Px \rightarrow Qz)\sigma$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{\cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z}\}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma = \forall x(P(x, y)\sigma_x) = \forall x P(x, a)$
- $\exists z(Px \to Qz)\sigma = \exists z((Px \to Qz)\sigma_z) = \exists z(Pfx \to Qz)$

Unifisering

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer.

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like, dvs. alle σ slik at $s\sigma = t\sigma$.

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like, dvs. alle σ slik at $s\sigma = t\sigma$.

- En substitusjon som gjør termene s og t syntaktisk like, kalles en unifikator for s og t.

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like, dvs. alle σ slik at $s\sigma = t\sigma$.

- En substitusjon som gjør termene s og t syntaktisk like, kalles en unifikator for s og t.
- To termer er unifiserbare hvis de har en unifikator.

Rask repetisjon

Rask repetisjon

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.

Rask repetisjon

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.

$$\forall x \exists y Lxy \ \vdash \ \exists x Lax$$

Rask repetisjon

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.

$$\frac{\exists y L u y \;\vdash\; L a v}{\forall x \exists y L x y \;\vdash\; \exists x L a x}$$

Rask repetisjon

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere Skolemtermer.

$$\frac{\exists y Luy \;\vdash\; Lav}{\forall x \exists y Lxy \;\vdash\; \exists x Lax}$$

Rask repetisjon

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere Skolemtermer.

$$\dfrac{\dfrac{Lufu \vdash Lav}{\exists y Luy \vdash Lav}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x Lax}$$

Rask repetisjon

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere Skolemtermer.
- Ved unifisering finner vi en substitusjon som erstatter frie variable med termer slik at utledningen lukkes.

$$\dfrac{\dfrac{Lufu \vdash Lav}{\exists y Luy \vdash Lav}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x Lax}$$

Rask repetisjon

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere Skolemtermer.
- Ved unifisering finner vi en substitusjon som erstatter frie variable med termer slik at utledningen lukkes.

$$u/a, v/fa$$

$$\dfrac{\dfrac{Lufu \vdash Lav}{\exists y Luy \vdash Lav}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x Lax}$$

Utvidet språk

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

- tellbart uendelig mange Skolemkonstanter, og

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

- tellbart uendelig mange Skolemkonstanter, og
- tellbart uendelig mange Skolemfunksjoner av hver aritet,

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

- tellbart uendelig mange Skolemkonstanter, og
- tellbart uendelig mange Skolemfunksjoner av hver aritet,

slik at symbolene i $\mathcal{S}$ er forskjellig fra symbolene i $\mathcal{L}$.

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

- tellbart uendelig mange Skolemkonstanter, og
- tellbart uendelig mange Skolemfunksjoner av hver aritet,

slik at symbolene i $\mathcal{S}$ er forskjellig fra symbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$ være språket vi får ved å utvide $\mathcal{L}$ med konstant- og funksjonssymbolene i $\mathcal{S}$.

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$
5. $Pu \vdash Pu, \exists x Px$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$
5. $Pu \vdash Pu, \exists x Px$

Lukkede sekventer

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$
5. $Pu \vdash Pu, \exists x Px$

Lukkede sekventer

Nr. 1 og 2 er *lukkede* sekventer.

γ-reglene

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK er:

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}\forall$$

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \;\vdash\; \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \;\vdash\; \Delta}\,\mathsf{L}\forall$$

u er en ny fri variabel

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathsf{R}\exists$$

u er en ny fri variabel

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathsf{R}\exists$$

u er en ny fri variabel

- Med *ny* mener vi her at u ikke må forekomme fritt i utledningen fra før.

δ-reglene

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK er:

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}\exists$$

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}\exists$$

f er en ny Skolemfunksjon

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\exists$$

f er en ny Skolemfunksjon
$\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}\exists \qquad\qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x \varphi} \, \mathsf{R}\forall$$

f er en ny Skolemfunksjon

$\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\exists \qquad\qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x \varphi} \ \mathsf{R}\forall$$

f er en ny Skolemfunksjon
$\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

- Med *ny* mener vi her at f ikke må forekomme i utledningen fra før.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK er

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ- og δ-reglene for frie variable

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ- og δ-reglene for frie variable, og
- α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ- og δ-reglene for frie variable, og
- α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ- og δ-reglene for frie variable, og
- α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:
  - Basismengden er mengden av *lukkede* sekventer.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ- og δ-reglene for frie variable, og
- α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:
  - Basismengden er mengden av *lukkede* sekventer.
  - Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ- og δ-reglene for frie variable, og
- α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:
  - Basismengden er mengden av *lukkede* sekventer.
  - Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.
- Vi krever altså at rotsekventen i en utledning *kun* inneholder lukkede formler!

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ- og δ-reglene for frie variable, og
- α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:
  - Basismengden er mengden av *lukkede* sekventer.
  - Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.
- Vi krever altså at rotsekventen i en utledning *kun* inneholder lukkede formler!
- Formlene i de andre sekventene i en utledning behøver imidlertid ikke være lukkede.

Eksempler på fri-variabel utledninger

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\forall x P x, P u \;\vdash\; \exists x P x}{\forall x P x \;\vdash\; \exists x P x}\,\mathsf{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\frac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px}{\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \;\vdash\; \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \;\vdash\; \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \;\vdash\; \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \;\vdash\; \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

$\mathsf{R}\exists$ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\forall x Px \;\vdash\; Pa \land Pb$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\forall x Px \ \vdash \ Pa \land Pb$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash\ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash\ \exists x Px}\,R\exists}{\forall x Px \ \vdash\ \exists x Px}\,L\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\forall x Px \ \vdash\ Pa \qquad \forall x Px \ \vdash\ Pb}{\forall x Px \ \vdash\ Pa \land Pb}\,R\land$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px}\ \mathsf{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px}\ \mathsf{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\cfrac{\forall x Px \ \vdash \ Pa \qquad\qquad \forall x Px \ \vdash \ Pb}{\forall x Px \ \vdash \ Pa \land Pb}\ \mathsf{R}\land$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ Pa}{\forall x Px \ \vdash \ Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \forall x Px \ \vdash \ Pb}{\forall x Px \ \vdash \ Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \;\vdash\; \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \;\vdash\; \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \;\vdash\; Pa}{\forall x Px \;\vdash\; Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \forall x Px \;\vdash\; Pb}{\forall x Px \;\vdash\; Pa \wedge Pb}\,\mathsf{R}\wedge$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \;\vdash\; \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \;\vdash\; \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \;\vdash\; Pa}{\forall x Px \;\vdash\; Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \cfrac{\forall x Px, Pv \;\vdash\; Pb}{\forall x Px \;\vdash\; Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \;\vdash\; Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash\ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash\ \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash\ \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash\ Pa}{\forall x Px \ \vdash\ Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \ \vdash\ Pb}{\forall x Px \ \vdash\ Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \ \vdash\ Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

L∀ i høyre og venstre gren kan ikke introdusere den samme variabelen, av samme grunn som over.

Eksempler på fri-variabel utledninger

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\forall x(Px \lor Qx) \ \vdash \ \forall x Px, \forall x Qx$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \ \vdash \ \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \ \vdash \ \forall x Px, \forall x Qx} \, \mathsf{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \ \vdash\ \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \ \vdash\ \forall x Px, \forall x Qx}\ \mathsf{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx \qquad \forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx \qquad \forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$
\dfrac{
  \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \;\vdash\; Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall
  \qquad
  \forall x(Px \lor Qx), Qu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx
}{
  \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall
}\,\mathsf{L}\lor
$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$
\cfrac{\cfrac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \;\vdash\; Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \vee Qx), Pu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall \qquad \forall x(Px \vee Qx), Qu \;\vdash\; \forall x Px, \color{red}{\forall x Qx}}{\cfrac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vee Qu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \vee Qx) \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall}\,\mathsf{L}\vee
$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$
\dfrac{
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \;\vdash\; Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall
\qquad
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \;\vdash\; \forall x Px, Q{\color{red}b}}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall
}{
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall
}\,\mathsf{L}\lor
$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall}{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall}\,\mathsf{L}\lor$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et nytt Skolemsymbol, dvs. et som ikke forekommer i utledningen fra før.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$
\dfrac{
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \;\vdash\; Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall
\qquad
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \;\vdash\; \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall
}{
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall
}\,\mathsf{L}\lor
$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et nytt Skolemsymbol, dvs. et som ikke forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan $\mathsf{R}\forall$ i høyre gren ikke introdusere den samme Skolemkonstanten som $\mathsf{R}\forall$ i venstre gren.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$
\dfrac{
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,R\forall
\qquad
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,R\forall
}{
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,L\forall
}\,L\lor
$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et nytt Skolemsymbol, dvs. et som ikke forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan R$\forall$ i høyre gren ikke introdusere den samme Skolemkonstanten som R$\forall$ i venstre gren.
- Dette er et *strengere* krav enn for δ-reglene i LK uten frie variable, der den introduserte parameteren ikke må forekomme i *konklusjonen*.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,R\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,R\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,L\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,L\forall$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et nytt Skolemsymbol, dvs. et som ikke forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan R$\forall$ i høyre gren ikke introdusere den samme Skolemkonstanten som R$\forall$ i venstre gren.
- Dette er et *strengere* krav enn for δ-reglene i LK uten frie variable, der den introduserte parameteren ikke må forekomme i *konklusjonen*.
- I utledningen over vet vi ikke hvilke symboler som forekommer i konklusjonen før vi har instansiert u!

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

$$\dfrac{\dfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px}\ \mathsf{R}\forall}{\vdash Px \to \forall x Px}\ \mathsf{R}{\to}$$

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

$$\dfrac{\dfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px}\,\mathsf{R}\forall}{\vdash Px \to \forall x Px}\,\mathsf{R}{\to}$$

Rotsekventen er ikke lukket.

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

$$\dfrac{\dfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px}\;\mathrm{R}\forall}{\vdash Px \to \forall x Px}\;\mathrm{R}{\to}$$

Rotsekventen er ikke lukket.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash Pf(v)v, \exists x \forall y Pyx}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \forall y Pyv, \exists x \forall y Pyx}\;\mathrm{R}\forall}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \exists x \forall y Pyx}\;\mathrm{R}\exists}{\forall x \exists y Pxy, \exists y Puy \vdash \exists x \forall y Pyx}\;\mathrm{L}\exists}{\forall x \exists y Pxy \vdash \exists x \forall y Pyx}\;\mathrm{L}\forall$$

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

$$\dfrac{\dfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px}\,R\forall}{\vdash Px \to \forall x Px}\,R\!\to$$

Rotsekventen er ikke lukket.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash Pf(v)v, \exists x \forall y Pyx}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \forall y Pyv, \exists x \forall y Pyx}\,R\forall}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \exists x \forall y Pyx}\,R\exists}{\forall x \exists y Pxy, \exists y Puy \vdash \exists x \forall y Pyx}\,L\exists}{\forall x \exists y Pxy \vdash \exists x \forall y Pyx}\,L\forall$$

De to δ-slutningene introduserer det samme Skolemfunksjonssymbolet.

Lukkede utledninger

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- σ lukker en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- σ lukker en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes *atomære* formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- σ lukker en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes *atomære* formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- σ lukker en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes *atomære* formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- σ lukker π hvis σ lukker alle løvsekventene i π.

Bevis

Bevis

Definisjon (Bevis)

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et fri-variabel LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et fri-variabel LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et fri-variabel LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og
- σ er en grunn substitusjon som lukker π.

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et fri-variabel LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og
- σ er en grunn substitusjon som lukker π.

- Vi krever at den lukkende substitusjonen skal være grunn, siden dette gjør sunnhetsbeviset *litt* lettere.

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et fri-variabel LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og
- σ er en grunn substitusjon som lukker π.

- Vi krever at den lukkende substitusjonen skal være grunn, siden dette gjør sunnhetsbeviset *litt* lettere.
- Senere skal vi se at vi kan lempe på dette kravet og tillate lukkende substitusjoner som ikke er grunne.

Eksempel (1)

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px}\ \mathsf{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px}\ \mathsf{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px} \text{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px} \text{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.
- σ lukker π, siden den lukker den eneste løvsekventen.

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash\ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash\ \exists x Px} \text{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash\ \exists x Px} \text{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.
- σ lukker π, siden den lukker den eneste løvsekventen.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$.

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.
- σ lukker π, siden den lukker den eneste løvsekventen.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$.

Merk:

Slik vi har definert fri-variabel LK vil f.eks. $\langle \pi, \sigma' \rangle$ der $\sigma' = \{v/u\}$ ikke være et bevis, siden σ' ikke er grunn.

Eksempel (2)

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \;\vdash\; Pa}{\forall x Px \;\vdash\; Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \;\vdash\; Pb}{\forall x Px \;\vdash\; Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \;\vdash\; Pa \wedge Pb}\,\mathsf{R}\wedge$$

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ Pa}{\forall x Px \ \vdash \ Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \ \vdash \ Pb}{\forall x Px \ \vdash \ Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \ \vdash \ Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ lukker venstre løvsekvent: $(Pu)\sigma = Pa$.

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ lukker venstre løvsekvent: $(Pu)\sigma = Pa$.
- σ lukker høyre løvsekvent: $(Pv)\sigma = Pb$.

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \ \vdash \ Pa}{\forall x Px \ \vdash \ Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \ \vdash \ Pb}{\forall x Px \ \vdash \ Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \ \vdash \ Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ lukker venstre løvsekvent: $(Pu)\sigma = Pa$.
- σ lukker høyre løvsekvent: $(Pv)\sigma = Pb$.
- σ lukker π, siden den lukker begge løvsekventene.

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ lukker venstre løvsekvent: $(Pu)\sigma = Pa$.
- σ lukker høyre løvsekvent: $(Pv)\sigma = Pb$.
- σ lukker π, siden den lukker begge løvsekventene.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash Pa \land Pb$.

Eksempel (3)

Eksempel (3)

La π være utledningen

$$
\dfrac{
  \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall
  \qquad
  \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall
}{
  \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall
}\,\mathsf{L}\lor
$$

Eksempel (3)

La π være utledningen

$$
\dfrac{
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall
\qquad
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall
}{
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall
}\,\mathsf{L}\lor
$$

- Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden u ikke kan instansieres med både a og b *samtidig*.

Eksempel (3)

La π være utledningen

$$
\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall}{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall}\,\mathsf{L}\lor
$$

- Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden u ikke kan instansieres med både a og b *samtidig*.
- Derfor finnes ikke noe bevis for sekventen $\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx$ basert på utledningen π.

Eksempel (3)

La π være utledningen

$$
\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall}{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall}\,\mathsf{L}\lor
$$

- Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden u ikke kan instansieres med både a og b *samtidig*.
- Derfor finnes ikke noe bevis for sekventen $\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx$ basert på utledningen π.
- Er rotsekventen gyldig...?

Semantikk

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?
- Vi kan bruke variabeltilordninger for å tolke frie variable som elementer i domenet til en gitt modell.

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?
- Vi kan bruke variabeltilordninger for å tolke frie variable som elementer i domenet til en gitt modell.
- Vi definerer så rekursivt hvordan vi kan tolke en vilkårlig førsteordens formel i en modell under en gitt variabeltilordning.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, $\ldots$

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, ...
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, ...

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, $\ldots$
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, $\ldots$
  - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3$, $\ldots$

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
    - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, $\ldots$
    - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, $\ldots$
    - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3$, $\ldots$
    - $\ldots$

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$.

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} =$ for en variabel x

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ for en variabel x

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ for en variabel x
- $c^{\mathcal{M},\mu} =$ for et konstantsymbol c

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ for en variabel x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ for et konstantsymbol c

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ for en variabel x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ for et konstantsymbol c
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} =$ for en funksjonsterm

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ for en variabel x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ for et konstantsymbol c
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ for en funksjonsterm

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ;

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x \varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x \varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x \varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.

Eksempel I

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{$

$\}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$, $\rangle$

$\}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle$

$\}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle \}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$, $\rangle, \langle$, $\rangle,$

$\langle$, $\rangle, \langle$, $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

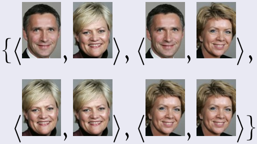
$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$



Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_1}, x^{\mathcal{M},\mu_1} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_1}, x^{\mathcal{M},\mu_1} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_1}, x^{\mathcal{M},\mu_1} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_1}, x^{\mathcal{M},\mu_1} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$

- **Ja**, både $e =$  og $e =$ .

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle$, $\langle$ ,  $\rangle$,

$\langle$ ,  $\rangle$, $\langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle$, $\langle$ ,  $\rangle$,

$\langle$ ,  $\rangle$, $\langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_2 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_2} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

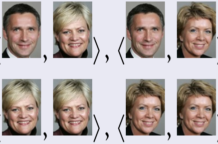
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$



Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_2 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_2} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_2 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_2} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$

- **Nei**, ingen slik $e \in |\mathcal{M}|$ finnes.

Falsifiserbarhet

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som ikke er falsifiserbar.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som ikke er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en motmodell, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som ikke er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en motmodell, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.
- I fri-variabel LK kan Γ og Δ inneholde formler som ikke er lukket.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som ikke er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en motmodell, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.
- I fri-variabel LK kan Γ og Δ inneholde formler som ikke er lukket.
- Vi ønsker at en motmodell til en sekvent skal være en motmodell *uavhengig* av hvordan vi tolker de frie variablene.

Falsifiserbarhet II

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil $\mathcal{M}$ være en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet III

Falsifiserbarhet III

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

Falsifiserbarhet III

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.

Falsifiserbarhet III

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b, ser vi at $\mathcal{M}'$ oppfyller Px og falsifiserer Pa.

Falsifiserbarhet III

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b, ser vi at $\mathcal{M}'$ oppfyller Px og falsifiserer Pa.
- Men hvis vi tolker x som a, ser vi at $\mathcal{M}'$ ikke lenger er en motmodell.

Falsifiserbarhet III

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b, ser vi at $\mathcal{M}'$ oppfyller Px og falsifiserer Pa.
- Men hvis vi tolker x som a, ser vi at $\mathcal{M}'$ ikke lenger er en motmodell.
- Her finnes en variabeltilordning som gjør at $\mathcal{M}'$ ikke er en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet IV

Falsifiserbarhet IV

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.

Falsifiserbarhet IV

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Falsifiserbarhet IV

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

Falsifiserbarhet IV

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for *alle* variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

Falsifiserbarhet IV

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for *alle* variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Γ sanne

Falsifiserbarhet IV

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for *alle* variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Γ sanne, og
- $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Δ usanne.

Falsifiserbarhet IV

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for *alle* variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Γ sanne, og
- $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Δ usanne.

En sekvent er

- falsifiserbar hvis den har en motmodell

Falsifiserbarhet IV

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for *alle* variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Γ sanne, og
- $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Δ usanne.

En sekvent er

- falsifiserbar hvis den har en motmodell
- gyldig hvis den ikke er falsifiserbar

Sunnhet

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Reglene i fri-variabel LK har ikke denne egenskapen!

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen
$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$
- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen
$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$
- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen
$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$
- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er ikke falsifiserbare. (Prøv!)

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er ikke falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene ikke er det!

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er falsifiserbar.

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er falsifiserbar.
- Vi skal så vise at alle utledninger med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbare.

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er falsifiserbar.
- Vi skal så vise at alle utledninger med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbare.
- Når vi har denne egenskapen, er resten av sunnhetsbeviset for fri-variabel LK tilsvarende beviset for den grunne kalkylen.

Falsifiserbarhet

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $\mathsf{G}^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $\mathsf{G}^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $\mathsf{G}^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^\top$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^\perp$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^\top$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^\perp$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^\top$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^\perp$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^\top$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^\perp$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\top}$ sanne

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\top}$ sanne, og
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\perp}$ usanne.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\top}$ sanne, og
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\perp}$ usanne.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π hvis for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\top}$ sanne, og
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\perp}$ usanne.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π hvis for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$ så finnes en gren i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\top}$ sanne, og
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\perp}$ usanne.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π hvis for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$ så finnes en gren i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

En utledning er falsifiserbar hvis det finnes en modell som falsifiserer den.

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \;\vdash\; Pa, Qb \qquad Qu \;\vdash\; Pa, Qb}{Pu \lor Qu \;\vdash\; Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \;\vdash\; Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \ \vdash \ Pa, Qb \qquad Qu \ \vdash \ Pa, Qb}{Pu \lor Qu \ \vdash \ Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \ \vdash \ Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π:

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \ \vdash \ Pa, Qb \qquad Qu \ \vdash \ Pa, Qb}{Pu \lor Qu \ \vdash \ Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \ \vdash \ Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π:
  - Hvis $\mu_1(u) = a$, så har vi at den høyre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_1.

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π:
  - Hvis $\mu_1(u) = a$, så har vi at den høyre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_1.
  - Hvis $\mu_2(u) = b$, så har vi at den venstre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_2.

Lemma

Hvis en slutningsregel fra fri-variabel LK anvendes på en falsifiserbar utledning, så får vi en ny falsifiserbar utledning.

Lemma

Hvis en slutningsregel fra fri-variabel LK anvendes på en falsifiserbar utledning, så får vi en ny falsifiserbar utledning.

- Vi skal med andre ord vise at reglene *bevarer falsifiserbarhet*.

Lemma

Hvis en slutningsregel fra fri-variabel LK anvendes på en falsifiserbar utledning, så får vi en ny falsifiserbar utledning.

- Vi skal med andre ord vise at reglene *bevarer falsifiserbarhet*.
- Vi får ett tilfelle for hver regel.

Lemma

Hvis en slutningsregel fra fri-variabel LK anvendes på en falsifiserbar utledning, så får vi en ny falsifiserbar utledning.

- Vi skal med andre ord vise at reglene *bevarer falsifiserbarhet*.
- Vi får ett tilfelle for hver regel.
- Alle tilfellene bortsett fra δ-reglene ($\mathsf{L}\exists$ og $\mathsf{R}\forall$) går på samme måte.

Lemma

Hvis en slutningsregel fra fri-variabel LK anvendes på en falsifiserbar utledning, så får vi en ny falsifiserbar utledning.

- Vi skal med andre ord vise at reglene *bevarer falsifiserbarhet*.
- Vi får ett tilfelle for hver regel.
- Alle tilfellene bortsett fra δ-reglene ($\mathsf{L}\exists$ og $\mathsf{R}\forall$) går på samme måte.
- Vi viser først hvordan beviset går for disse og tar δ-reglene til slutt.

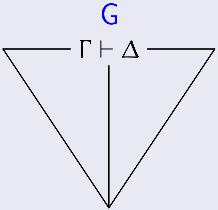
Bevis.

Overblikk:

Bevis.

Overblikk:

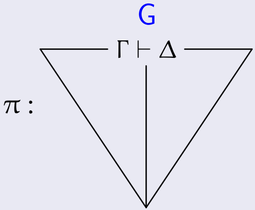
π :



$\square$

Bevis.

Overblikk:

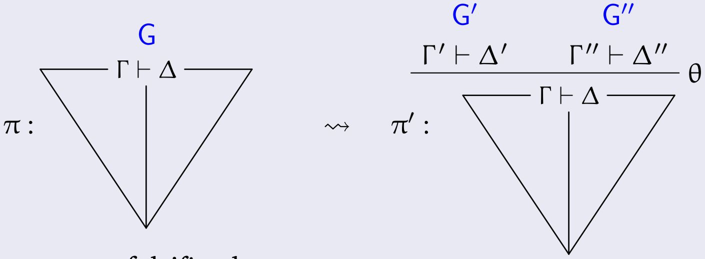


- Anta at π er falsifiserbar.

□

Bevis.

Overblikk:

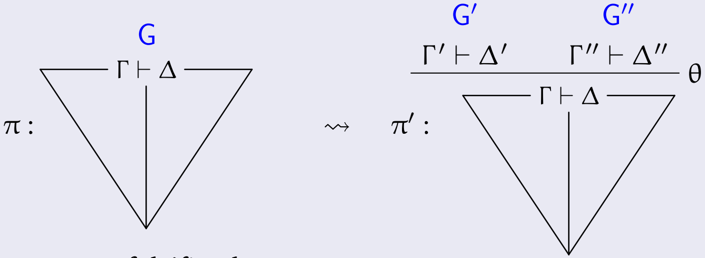


- Anta at π er falsifiserbar.

$\square$

Bevis.

Overblikk:

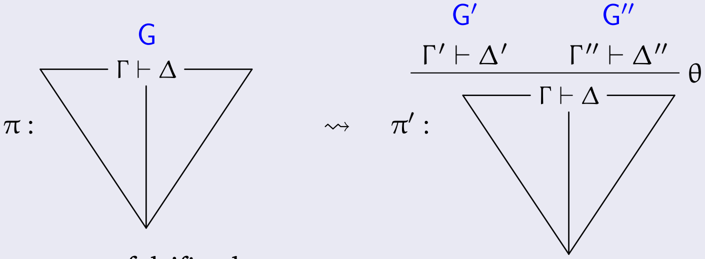


- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.

□

Bevis.

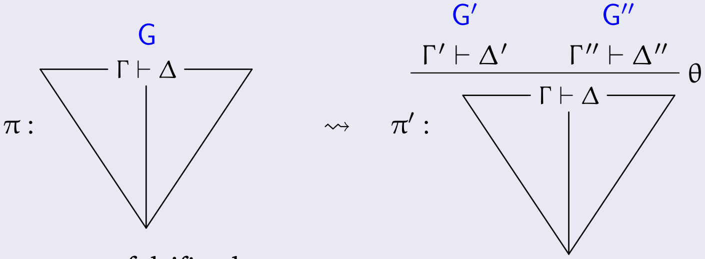
Overblikk:



- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.

$\square$

Overblikk:

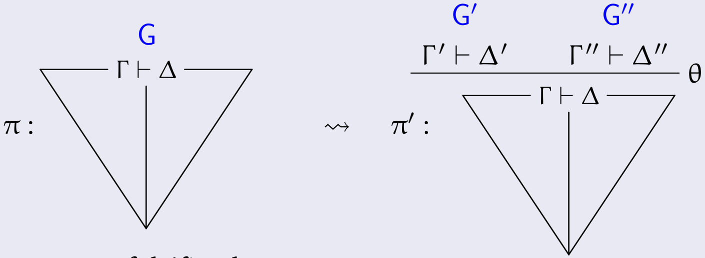


- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.

$\square$

Bevis.

Overblikk:

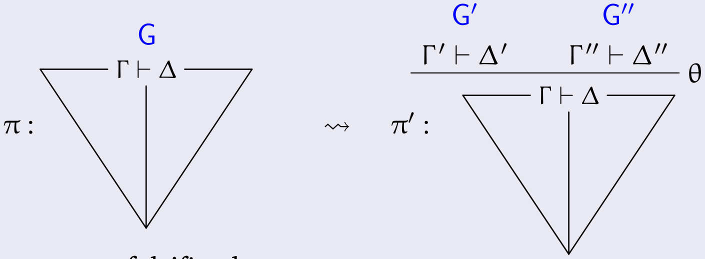


- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi får to tilfeller:

$\square$

Bevis.

Overblikk:

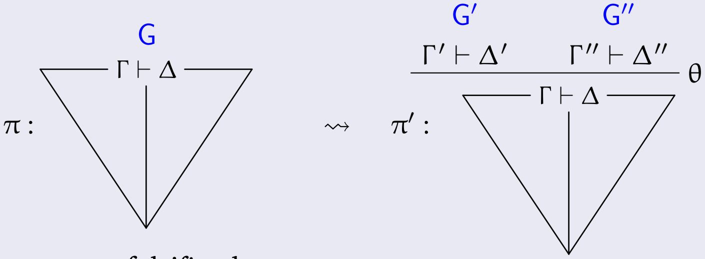


- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi får to tilfeller:
    1. Den grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ er en annen enn G.

$\square$

Bevis.

Overblikk:



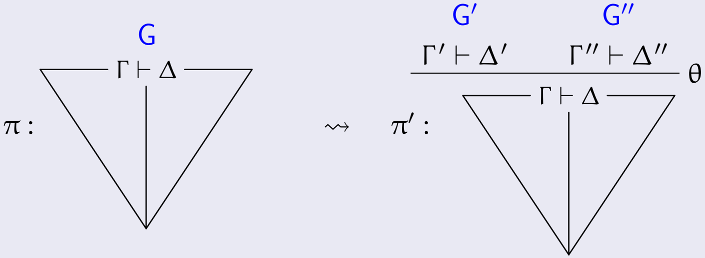
- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi får to tilfeller:
  1. Den grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ er en annen enn G.
  2. Den falsifiserte grenen er G.

$\square$

Bevis (tilfelle 1).

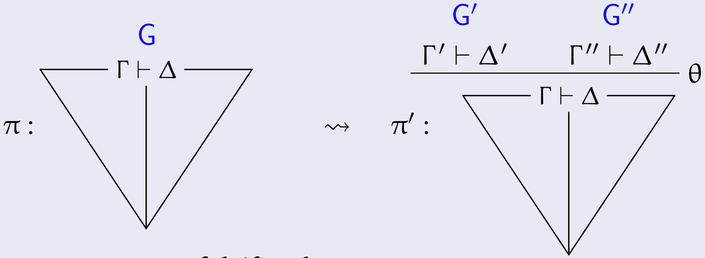
$\square$

Bevis (tilfelle 1).



$\square$

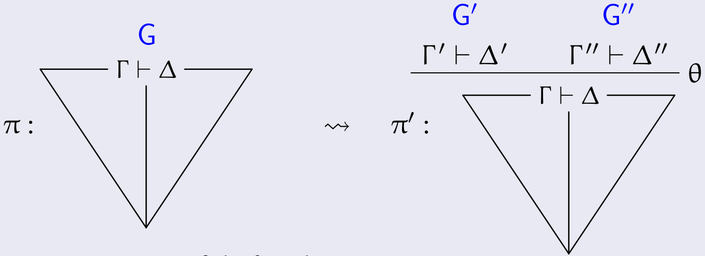
Bevis (tilfelle 1).



- Har antatt at π er falsifiserbar.

□

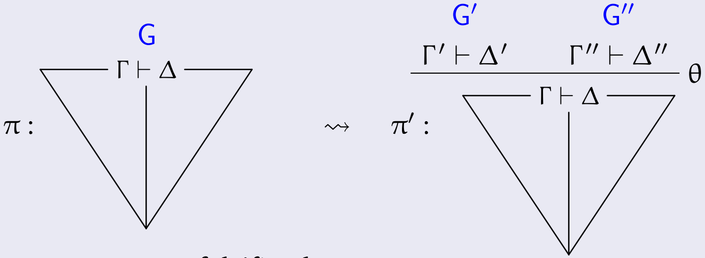
Bevis (tilfelle 1).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har valgt en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.

$\square$

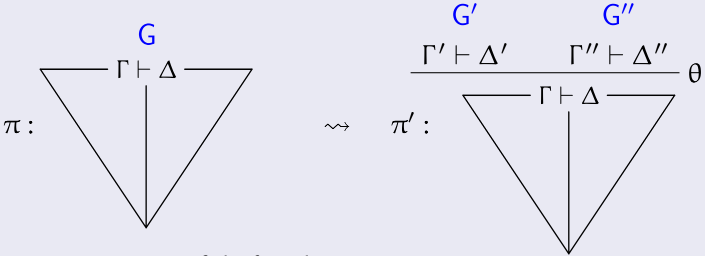
Bevis (tilfelle 1).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har valgt en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ ikke er G.

$\square$

Bevis (tilfelle 1).

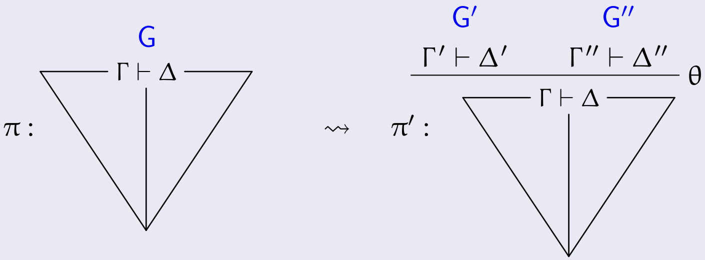


- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har valgt en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ ikke er G.
- Da er den falsifiserte grenen i π også en gren i π'.

$\square$

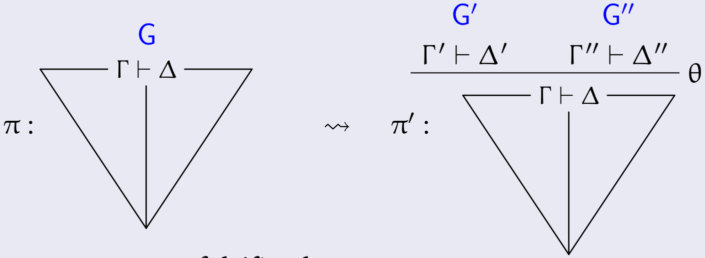
Bevis (tilfelle 2).

Bevis (tilfelle 2).



□

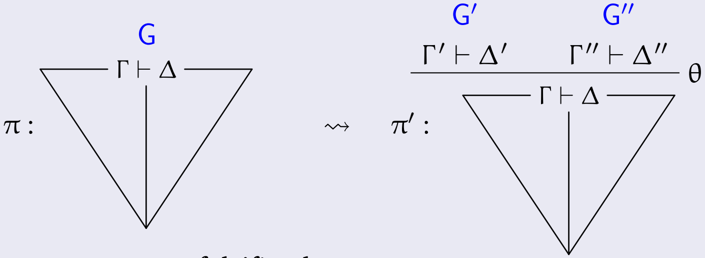
Bevis (tilfelle 2).



- Har antatt at π er falsifiserbar.

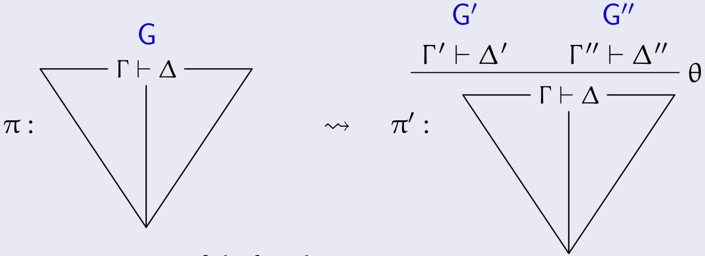
$\square$

Bevis (tilfelle 2).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.

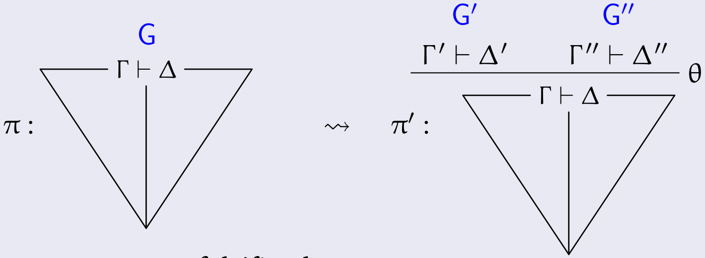
$\square$



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

$\square$

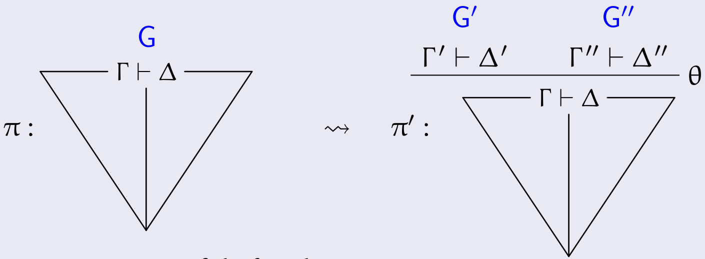
Bevis (tilfelle 2).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Må vise at enten G' eller G'' er falsifisert i π'.

□

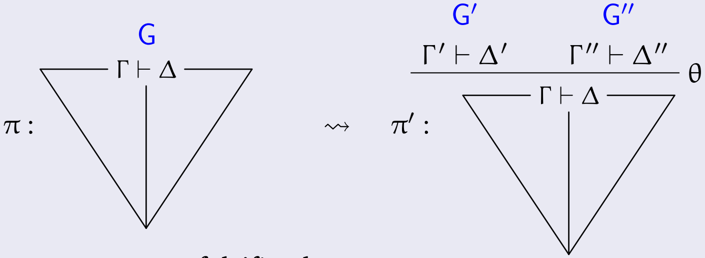
Bevis (tilfelle 2).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Må vise at enten G' eller G'' er falsifisert i π'.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.

$\square$

Bevis (tilfelle 2).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Må vise at enten G' eller G'' er falsifisert i π'.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Vi viser argumentet for $L\lor$ og $L\forall$.

$\square$

Bevis (tilfelle 2 – L$\lor$).

Bevis (tilfelle 2 – L$\vee$).

$$\dfrac{\overset{\color{blue}{G'}}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{\color{blue}{G''}}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\, \mathsf{L}\vee$$

$\color{blue}{G}$

Bevis (tilfelle 2 – L$\vee$).

$$\cfrac{\overset{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ

Bevis (tilfelle 2 – L$\vee$).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$

Bevis (tilfelle 2 – L∨).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta} \qquad \overset{G''}{\Gamma, B \ \vdash \ \Delta}}{\underset{G}{\Gamma, A \vee B \ \vdash \ \Delta}} \, \mathsf{L}\vee$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.

Bevis (tilfelle 2 – L$\vee$).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

$$G$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ eller $\mathcal{M}, \mu \models B$.

Bevis (tilfelle 2 – L$\vee$).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ eller $\mathcal{M}, \mu \models B$.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models A$, så er G' falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

Bevis (tilfelle 2 – L$\lor$).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \lor B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ eller $\mathcal{M}, \mu \models B$.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models A$, så er G′ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models B$, så er G″ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ. $\square$

Bevis (tilfelle 2 – L∀).

Bevis (tilfelle 2 – L∀).

$$\dfrac{\begin{array}{c}G' \\ \Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta\end{array}}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall$$

$$G$$

Bevis (tilfelle 2 – L$\forall$).

$$\dfrac{\begin{array}{c}\color{blue}{G'}\\ \Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall$$

$$\color{blue}{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ

Bevis (tilfelle 2 – L$\forall$).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta}}{\underset{G}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}}\ \mathsf{L}\forall$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$

Bevis (tilfelle 2 – L$\forall$).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta}}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}\forall$$

$$G$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.

Bevis (tilfelle 2 – L∀).

$$\dfrac{\begin{array}{c}G' \\ \Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta\end{array}}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall$$

$$G$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).

Bevis (tilfelle 2 – L$\forall$).

$$\cfrac{\cfrac{G'}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta}}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}\forall$$

$$G$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$

Bevis (tilfelle 2 – L∀).

$$\dfrac{\begin{array}{c}G' \\ \Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta \\ G\end{array}} \, L\forall$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x \varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.

Bevis (tilfelle 2 – L∀).

$$\dfrac{\begin{array}{c}G' \\ \Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta\end{array}}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall$$

G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$

Bevis (tilfelle 2 – L$\forall$).

$$\dfrac{\overset{\color{blue}{G'}}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta}}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall$$

$$\color{blue}{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.

Bevis (tilfelle 2 – L$\forall$).

$$\begin{array}{c} G' \\ \dfrac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall \\ \Big| \ G \end{array}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.
- Da er G′ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

$\square$

Bevis (tilfelle 2 – L∀).

$$\dfrac{\color{blue}{G'} \quad \Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta \quad \color{blue}{G}} \ \mathsf{L}\forall$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.
- Da er G' falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ. $\square$

Steget fra $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$ til $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$ kan vises ved strukturell induksjon på formler.

Bevis (δ-regler).

Bevis (δ-regler).

Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for L∃.

$$\dfrac{\begin{array}{c} G' \\ \Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \ \vdash \ \Delta \end{array}}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\exists$$

$$\Big|\ G$$

Bevis (δ-regler).

Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for $\mathsf{L}\exists$.

$$\cfrac{\begin{array}{c}\color{blue}{G'}\\ \Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \;\vdash\; \Delta\end{array}}{\Gamma, \exists x \varphi \;\vdash\; \Delta}\,\mathsf{L}\exists$$

$$\color{blue}{G}$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:

Bevis (δ-regler).

Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for $\mathsf{L}\exists$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{G}'\\ \Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \ \vdash \ \Delta\end{array}}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\exists$$

$$\mathsf{G}$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$

Bevis (δ-regler).

Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for $\mathsf{L}\exists$.

$$\cfrac{\begin{array}{c}\color{blue}{G'}\\ \Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \ \vdash \ \Delta\end{array}}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\exists$$

$$\color{blue}{G}$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leqslant i \leqslant n$.

Bevis (δ-regler).

Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for $\mathsf{L}\exists$.

$$\begin{array}{c} G' \\ \dfrac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \;\vdash\; \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \;\vdash\; \Delta}\;\mathsf{L}\exists \\ G \end{array}$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leqslant i \leqslant n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x \varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$.

Bevis (δ-regler).

Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for $\mathsf{L}\exists$.

$$\begin{array}{c} \color{blue}{G'} \\ \dfrac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \;\vdash\; \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \;\vdash\; \Delta}\,\mathsf{L}\exists \\ \color{blue}{G} \end{array}$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leqslant i \leqslant n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x \varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n) = e$.

Bevis (δ-regler).

Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for L∃.

$$\begin{array}{c} G' \\ \dfrac{\Gamma, \varphi[f(u_1,\ldots,u_n)/x] \;\vdash\; \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \;\vdash\; \Delta}\,\mathsf{L}\exists \\ G \end{array}$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1,\ldots,a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leqslant i \leqslant n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x\varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1,\ldots,a_n) = e$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x\varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1,\ldots,a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.

Bevis (δ-regler).

Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for $\mathsf{L}\exists$.

$$\begin{array}{c} \color{blue}{G'} \\ \dfrac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\exists \\ \Big| \ \color{blue}{G} \end{array}$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leqslant i \leqslant n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x \varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n) = e$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x \varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.
- Påstand: $\mathcal{M}'$ falsifiserer π'.

Bevis (δ-regler).

Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for $\mathsf{L}\exists$.

$$\cfrac{\begin{array}{c}G' \\ \Gamma, \varphi[f(u_1,\ldots,u_n)/x] \ \vdash \ \Delta\end{array}}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\exists$$

$$\Big| \; G$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leqslant i \leqslant n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x\varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n) = e$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x\varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.
- Påstand: $\mathcal{M}'$ falsifiserer π'. Oppgave. $\square$

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på utledninger.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på utledninger.

- Basistilfellet: rotsekventen er falsifiserbar.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på utledninger.

- Basistilfellet: rotsekventen er falsifiserbar.
- Induksjonssteget: følger fra Lemma.

□

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ. Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ. Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ, så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ. Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ, så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.

Bevis.

Oppgave. $\square$

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathsf{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathsf{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathsf{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathsf{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

$\square$

Kompletthet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

Kompletthet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Kompletthet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Kompletthet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Husk:

- En modell $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for $\mathcal{M}$ gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.

Kompletthet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Husk:

- En modell $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for $\mathcal{M}$ gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.
- Hvis formlene i Γ og Δ er *lukkede*, vil sannhetsverdiene til formlene under $\mathcal{M}$ være *uavhengig av variabeltilordning*.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
    - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G, og
  - hvis G inneholder en γ-formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G, og
  - hvis G inneholder en γ-formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G.
  - *"Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener."*

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G, og
  - hvis G inneholder en γ-formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G.
  - *"Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener."*
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må grenseutledningen inneholde en åpen gren G (ved Königs lemma).

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i $\mathcal{G}$ til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til $\mathcal{G}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\perp}$.
  - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\perp}$.
  - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
  - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i $G^{\top}$ eller $G^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\perp}$.
  - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
  - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i $G^{\top}$ eller $G^{\perp}$.
- Det følger at $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$, siden $\Gamma \subseteq G^{\top}$ og $\Delta \subseteq G^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathsf{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathsf{G}^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger per definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger per definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger per definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
  - For α-, β- og δ-formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G, og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^\top$ og falsifiserer alle formler i $G^\perp$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger per definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
  - For α-, β- og δ-formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G, og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G.
  - For γ-formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger per definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
  - For α-, β- og δ-formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G, og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G.
  - For γ-formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G.
- Siden delformlene er av enklere struktur enn φ, kan vi anta at påstanden holder for disse, og bruke semantikken til å slutte at påstanden holder for φ.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en grunn substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en grunn substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den grunnede åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en grunn substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den grunnede åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ-reglene imidlertid frie variable istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av rettferdig strategi.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en grunn substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den grunnede åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ-reglene imidlertid frie variable istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av rettferdig strategi.
- Vi må også velge den grunnende substitusjonen slik at den grunnede åpne grenen får samme egenskaper m.h.p. γ-formler som i grenseutledningen i grunn LK.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er rettferdig hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er rettferdig hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

1. Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er rettferdig hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

1. Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.
2. Hvis φ er en γ-formel på formen $Qx\psi$ i en gren, så er $\psi[u/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for uendelig mange variable u.

Rettferdig substitusjon

Rettferdig substitusjon

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}
$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

Rettferdig substitusjon

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.
- Utledningen har kun én gren, kall den G.

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}
$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.

Rettferdig substitusjon

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.

Rettferdig substitusjon

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\cfrac{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.
- Vi ser at Herbrand-universet til $G\sigma$ er $a, fa, ffa, fffa, \ldots$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$
\begin{array}{r}
\vdots \\
\forall x Px, Pa, Pa, Pa \ \vdash \ Qfa \\
\hline
\forall x Px, Pa, Pa \ \vdash \ Qfa \\
\hline
\forall x Px, Pa \ \vdash \ Qfa \\
\hline
\forall x Px \ \vdash \ Qfa
\end{array}
$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.
- Vi ser at Herbrand-universet til $G\sigma$ er $a, fa, ffa, fffa, \ldots$ Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt ikke er i $G\sigma$, f.eks. $t = fa$.

Rettferdig substitusjon

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.
- Vi ser at Herbrand-universet til $G\sigma$ er $a, fa, ffa, fffa, \ldots$ Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt ikke er i $G\sigma$, f.eks. $t = fa$.
- Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor ikke gjøre $\forall x Px$ sann.

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}
$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x P x, P u_1, P u_2, P u_3 \vdash Q f a}}{\forall x P x, P u_1, P u_2 \vdash Q f a}}{\dfrac{\forall x P x, P u_1 \vdash Q f a}{\forall x P x \vdash Q f a}}
$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \ \vdash \ Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \ \vdash \ Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \ \vdash \ Qfa}}{\forall x Px \ \vdash \ Qfa}
$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\dfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pfa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pfa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}
$$

- Vi har nå at $Pt \in G\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til $G\tau$.

Rettferdig substitusjon II

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pfa, Pffa \ \vdash \ Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pfa \ \vdash \ Qfa}}{\forall x Px, Pa \ \vdash \ Qfa}}{\forall x Px \ \vdash \ Qfa}$$

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.
- Vi har nå at $Pt \in G\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til $G\tau$.
- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra $G\tau$ oppfylle $\forall x Px$.

Rettferdig substitusjon II

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x Px, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa \\ \hline \forall x Px, Pa, Pfa \vdash Qfa \\ \hline \forall x Px, Pa \vdash Qfa \\ \hline \forall x Px \vdash Qfa \end{array}$$

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

- Vi har nå at $Pt \in G\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til $G\tau$.
- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra $G\tau$ oppfylle $\forall x Px$.
- Vi kaller τ en rettferdig substitusjon.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

- σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel $Qx\varphi$ i G hvis

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

- σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

- σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i G

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

- σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

- σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er rettferdig m.h.p. grenen G hvis

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

- σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er rettferdig m.h.p. grenen G hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ-formlene i G.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

- σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er rettferdig m.h.p. grenen G hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ-formlene i G.
- σ er rettferdig m.h.p. utledningen π hvis

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

- σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er rettferdig m.h.p. grenen G hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ-formlene i G.
- σ er rettferdig m.h.p. utledningen π hvis σ er rettferdig m.h.p. hver gren i π.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at $G\sigma$ kun inneholder lukkede formler.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at $G\sigma$ kun inneholder lukkede formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at $G\sigma$ kun inneholder lukkede formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at $G\sigma$ kun inneholder lukkede formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket. Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor falsifisere $\Gamma \vdash \Delta$ uavhengig av variabeltilordning.