INF3170 – Forelesning 10

Fri-variabel sekventkalkyle

Roger Antonsen - 20. april 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-27 11:37)

Innhold

Fri-variabel sekventkalkyle

Introduksjon

- Kalkylene i seg selv sier ingenting om *hvordan* man finner bevis for gyldige sekventer.
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.
- Det er ikke så lett å lage effektive søkealgoritmer for grunn sekventkalkyle.
- Vi skal i dag se litt på *fri-variabel sekventkalkyle*, som egner seg bedre for automatisk bevissøk.
- Vi kan motivere dette ved å se på γ-reglene.

  (Se forelesningsnotatene fra 2007 for langversjonen av denne forelesningen.)

Viktigheten av γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathsf{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x.
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ-formel med *alle* termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ-formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å *finne bevis så tidlig som mulig*?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P x, P a, \ldots, P f f f a \vdash P f f f a, Q g a}{\vdots}}{\forall x P x, P a \vdash P f f f a, Q g a}}{\forall x P x \vdash P f f f a, Q g a} \qquad \underset{1}{a}, \underset{2}{fa}, \underset{3}{ga}, \underset{4}{ffa}, \underset{5}{fga}, \ldots, \underset{i}{fffa}, \ldots$$

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn *frie variable*:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{a/u}{\forall x P x, P u \vdash P a}}{\forall x P x \vdash P a} \qquad \dfrac{\overset{b/v}{\forall x P x, P v \vdash P b}}{\forall x P x \vdash P b}}{\forall x P x \vdash P a \wedge P b}$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.
- Hvilke substitusjoner vi kan anvende på løvnoder med frie variable slik at de blir aksiomer?
- Problemet kan løses med *unifiseringsalgoritmer*.

Hva med δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er *ny* når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\dfrac{\dfrac{\overset{b/u,\, a/v}{L u a \vdash L b v}}{\exists y L u y \vdash \forall y L y v}}{\forall x \exists y L x y \vdash \exists x \forall y L y x} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{kan ikke lukkes}}{L u f(u) \vdash L g(v) v}}{\exists y L u y \vdash \forall y L y v}}{\forall x \exists y L x y \vdash \exists x \forall y L y x}$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en *Skolemterm*:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

  der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en *Skolemfunksjon*, og $u_1, \ldots, u_n$ er alle variablene som forekommer fritt i δ-formelen.
- På den måten sikrer vi at termen introdusert av δ-regelen er *ny* uansett hva slags verdi vi velger å instansiere de frie variablene med.

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s.
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer *samtidig*.
- Vi skal nå definere en bestemt type funksjoner – *substitusjoner* – som generaliserer én-variabel substitusjon til flere variable.
- Notasjon: Når vi anvender en substitusjon σ på en formel φ eller en term t skriver vi $\varphi\sigma$ eller $t\sigma$ istedenfor $\sigma(\varphi)/\sigma(t)$.

Definisjon (Substitusjon).
En *substitusjon* er en funksjon σ fra mengden variable $\mathcal{V}$ til mengden av termer $\mathcal{T}$ i et gitt førsteordens språk.

- *Støtten* (support) eller *støttemengden* (support set) til σ er mengden av variable x slik at $x\sigma \neq x$.
- σ er *grunn* dersom $x\sigma$ er en lukket term for alle variable x i støttemengden til σ.

Notasjon.
En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \ldots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \ldots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$$

- Substitusjonen ϵ slik at $x\epsilon = x$ for alle variable x kalles *identitetssubstitusjonen*.
- Identitetssubstitusjonen kan skrives $\{\}$ siden den har tom støttemengde.

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$\tau = \{a/y, fx/z\}$

- er en substitusjon slik at
  - $y\sigma = a$
  - $z\sigma = fx$
  - $v\sigma = v$ for alle andre variable
- er *ikke* en grunn substitusjon

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer).
Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau = y$
- $f(x, y)\tau = f(y, x)$

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner *ikke* skal endre *bundne* variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \to Qy)\sigma = \forall x Px \to Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon).
La σ være en substitusjon. Substitusjonen σ *begrenset* på x, skrevet σ_x, er definert slik at

$$y\sigma_x = \begin{cases} y & \text{hvis } y = x \\ y\sigma & \text{ellers} \end{cases}$$

for enhver variabel y.

Definisjon (Substitusjon på formler).
$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\land, \lor, \to\}$
4. $(Qx\psi)\sigma = Qx(\psi\sigma_x)$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

- Vi antar, som tidligere, at ingen variable blir bundet som resultat av å anvende en substitusjon.
- Dette kan vi unngå ved å omdøpe bundne variable.

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{\cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z}\}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma = \forall x(P(x, y)\sigma_x) = \forall x P(x, a)$
- $\exists z(Px \to Qz)\sigma = \exists z((Px \to Qz)\sigma_z) = \exists z(Pfx \to Qz)$

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.
- *Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!*

Unifiseringsproblemet
La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like, dvs. alle σ slik at $s\sigma = t\sigma$.

- En substitusjon som gjør termene s og t syntaktisk like, kalles en *unifikator* for s og t.
- To termer er *unifiserbare* hvis de har en unifikator.

Rask repetisjon

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en *fri* variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere *Skolemtermer*.
- Ved unifisering finner vi en substitusjon som erstatter frie variable med termer slik at utledningen lukkes.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{u/a, v/fa}{Lufu \vdash Lav}}{\exists yLuy \vdash Lav}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists xLax}$$

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer *Skolemkonstanter* og *Skolemfunksjoner*.
- Disse symbolene er *nye* symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er *utvidet* med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk).
La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

- tellbart uendelig mange *Skolemkonstanter*, og
- tellbart uendelig mange *Skolemfunksjoner* av hver aritet,

slik at symbolene i $\mathcal{S}$ er forskjellig fra symbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\text{sko}}$ være språket vi får ved å utvide $\mathcal{L}$ med konstant- og funksjonssymbolene i $\mathcal{S}$.

Fri-variabel sekventkalkyle

Sekventer

Definisjon (Sekvent).
La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- En *sekvent* er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er *lukket* hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

1. $\forall x P x \vdash P a$
2. $\forall x \exists y L x y \vdash \exists x \forall y L y x$
3. $\forall x P x y \vdash P u f u$
4. $P u \vdash P a$
5. $P u \vdash P u, \exists x P x$

Lukkede sekventer
Nr. 1 og 2 er *lukkede* sekventer.

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK).
γ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

u er en *ny* fri variabel

- Med *ny* mener vi her at u ikke må forekomme fritt i utledningen fra før.

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK).
δ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

f er en *ny* Skolemfunksjon
$\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

- Med *ny* mener vi her at f ikke må forekomme i utledningen fra før.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK).
Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ- og δ-reglene for frie variable, og
- α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK.

- Mengden av *fri-variabel utledninger* defineres induktivt:
  - *Basismengden* er mengden av lukkede sekventer.
  - Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.
- Vi krever altså at rotsekventen i en utledning *kun* inneholder lukkede formler!
- Formlene i de andre sekventene i en utledning behøver imidlertid ikke være lukkede.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

$\mathsf{R}\exists$ kan *ikke* introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

$\mathsf{L}\forall$ i høyre og venstre gren kan *ikke* introdusere den samme variabelen, av samme grunn som over.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et *nytt* Skolemsymbol, dvs. et som *ikke* forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan $\mathsf{R}\forall$ i høyre gren *ikke* introdusere den samme Skolemkonstanten som $\mathsf{R}\forall$ i venstre gren.
- Dette er et *strengere* krav enn for δ-reglene i LK uten frie variable, der den introduserte parameteren ikke må forekomme i *konklusjonen*.
- I utledningen over vet vi ikke hvilke symboler som forekommer i konklusjonen før vi har instansiert u!

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

$$\cfrac{\cfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px}\,\mathsf{R}\forall}{\vdash Px \to \forall x Px}\,\mathsf{R}\!\to$$

Rotsekventen er ikke lukket.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash Pf(v)v, \exists x \forall y Pyx}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \forall y Pyv, \exists x \forall y Pyx}\,\mathsf{R}\forall}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \exists x \forall y Pyx}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x \exists y Pxy, \exists y Puy \vdash \exists x \forall y Pyx}\,\mathsf{L}\exists}{\forall x \exists y Pxy \vdash \exists x \forall y Pyx}\,\mathsf{L}\forall$$

De to δ-slutningene introduserer det samme Skolemfunksjonssymbolet.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å *lukke* en utledning.

Definisjon (Lukking).
La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- σ *lukker* en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes *atomære* formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- σ *lukker* π hvis σ lukker alle løvsekventene i π.

Bevis

Definisjon (Bevis).
Et *fri-variabel LK-bevis* for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og
- σ er en *grunn* substitusjon som lukker π.

- Vi krever at den lukkende substitusjonen skal være *grunn*, siden dette gjør sunnhetsbeviset *litt* lettere.

- Senere skal vi se at vi kan lempe på dette kravet og tillate lukkende substitusjoner som ikke er grunne.

Eksempel (1).
La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \;\vdash\; \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \;\vdash\; \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.
- σ lukker π, siden den lukker den eneste løvsekventen.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et *bevis* for sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$.

Merk:
Slik vi har definert fri-variabel LK vil f.eks. $\langle \pi, \sigma' \rangle$ der $\sigma' = \{v/u\}$ *ikke* være et bevis, siden σ' ikke er grunn.

Eksempel (2).
La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \;\vdash\; Pa}{\forall x Px \;\vdash\; Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \;\vdash\; Pb}{\forall x Px \;\vdash\; Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \;\vdash\; Pa \wedge Pb}\,\mathsf{R}\wedge$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ lukker venstre løvsekvent: $(Pu)\sigma = Pa$.
- σ lukker høyre løvsekvent: $(Pv)\sigma = Pb$.
- σ lukker π, siden den lukker begge løvsekventene.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et *bevis* for sekventen $\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb$.

Eksempel (3).
La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \;\vdash\; Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \vee Qx), Pu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \vee Qx), Qu \;\vdash\; \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \vee Qx), Qu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall}{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vee Qu \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\vee}{\forall x(Px \vee Qx) \;\vdash\; \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall$$

- Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden u *ikke* kan instansieres med både a og b *samtidig*.

- Derfor finnes ikke noe bevis for sekventen $\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx$ basert på utledningen π.
- Er rotsekventen gyldig...?

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?
- Vi kan bruke *variabeltilordninger* for å tolke frie variable som elementer i domenet til en gitt modell.
- Vi definerer så rekursivt hvordan vi kan tolke en vilkårlig førsteordens formel i en modell under en gitt variabeltilordning.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning).
La $\mathcal{M}$ være en modell. En *variabeltilordning* for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, $\ldots$
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, $\ldots$
  - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3$, $\ldots$
  - $\ldots$

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable).
La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ for en variabel x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ for et konstantsymbol c
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ for en funksjonsterm

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable).
La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er *sann* i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

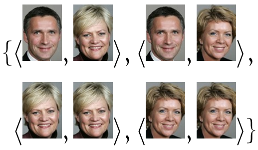
- Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det *ikke* er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *og* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for alle* a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for minst en* a i $|\mathcal{M}|$.

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$



Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- *Er det slik at* $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$*?*
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_1}, x^{\mathcal{M},\mu_1} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$

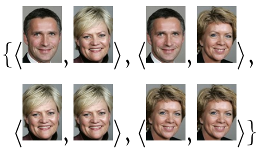
- **Ja**, både $e =$  og $e =$ .

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$



Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- *Er det slik at* $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$*?*
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_2 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_2} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$

- **Nei**, ingen slik $e \in |\mathcal{M}|$ finnes.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en *lukket* sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som *ikke* er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en *motmodell*, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.
- I fri-variabel LK kan Γ og Δ inneholde formler som *ikke* er lukket.
- Vi ønsker at en motmodell til en sekvent skal være en motmodell *uavhengig* av hvordan vi tolker de frie variablene.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil $\mathcal{M}$ være en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet III

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b, ser vi at $\mathcal{M}'$ oppfyller Px og falsifiserer Pa.
- Men hvis vi tolker x som a, ser vi at $\mathcal{M}'$ ikke lenger er en motmodell.
- Her finnes en variabeltilordning som gjør at $\mathcal{M}'$ ikke er en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet IV

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for *hver enkelt* variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent).
En modell $\mathcal{M}$ er en *motmodell* til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for *alle* variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Γ sanne, og
- $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Δ usanne.

En sekvent er

- *falsifiserbar* hvis den har en motmodell
- *gyldig* hvis den ikke er falsifiserbar

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet).
En sekventkalkyle er *sunn* dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Reglene i fri-variabel LK har *ikke* denne egenskapen!

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er *ikke* falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene *ikke* er det!

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er *falsifiserbar*.
- Vi skal så vise at alle utledninger med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbare.
- Når vi har denne egenskapen, er resten av sunnhetsbeviset for fri-variabel LK tilsvarende beviset for den grunne kalkylen.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet).
La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er *falsifisert* av $\mathcal{M}$ under μ hvis
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\top}$ sanne, *og*
  - $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\perp}$ usanne.
- $\mathcal{M}$ *falsifiserer* π hvis for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$ så finnes en gren i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

En utledning er *falsifiserbar* hvis det finnes en modell som falsifiserer den.

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen
La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

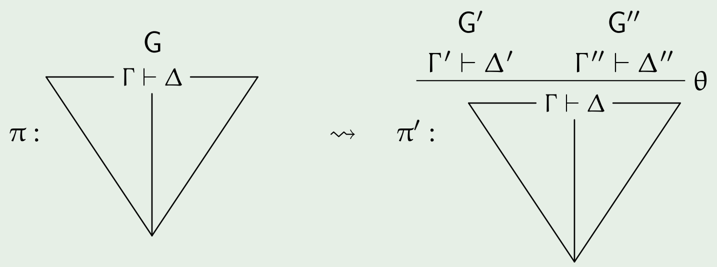
$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π:
  - Hvis $\mu_1(u) = a$, så har vi at den høyre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_1.
  - Hvis $\mu_2(u) = b$, så har vi at den venstre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_2.

Lemma.
Hvis en slutningsregel fra fri-variabel LK anvendes på en falsifiserbar utledning, så får vi en ny falsifiserbar utledning.

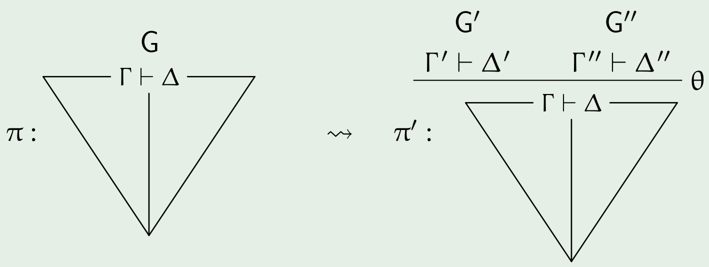
- Vi skal med andre ord vise at reglene *bevarer falsifiserbarhet*.
- Vi får ett tilfelle for hver regel.
- Alle tilfellene bortsett fra δ-reglene (L$\exists$ og R$\forall$) går på samme måte.
- Vi viser først hvordan beviset går for disse og tar δ-reglene til slutt.

Bevis.
Overblikk:



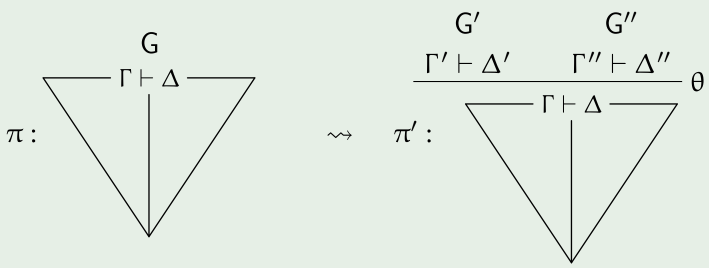
- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi får to tilfeller:
  1. Den grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ er en annen enn G.
  2. Den falsifiserte grenen er G.

Bevis (Bevis (tilfelle 1).).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har valgt en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ *ikke* er G.
- Da er den falsifiserte grenen i π også en gren i π'.

Bevis (Bevis (tilfelle 2).).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Må vise at enten G' eller G'' er falsifisert i π'.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Vi viser argumentet for L$\vee$ og L$\forall$.

Bevis (Bevis (tilfelle 2 – L$\vee$).).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\vee$$

G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.

- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models B$.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models A$, så er G' falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models B$, så er G'' falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

Bevis (Bevis (tilfelle 2 – L$\forall$).).

$$\dfrac{\begin{array}{c} G' \\ \Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \ \vdash \ \Delta \end{array}}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall$$
$$G$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for *alle* $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.
- Da er G' falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

Steget fra $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$ til $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$ kan vises ved strukturell induksjon på formler.

Bevis (Bevis (δ-regler).).
Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for L$\exists$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} G' \\ \Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \ \vdash \ \Delta \end{array}}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$
$$G$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leqslant i \leqslant n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x\varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n) = e$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x\varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.
- Påstand: $\mathcal{M}'$ falsifiserer π'. Oppgave.

Lemma.
Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.
Ved strukturell induksjon på utledninger.

- Basistilfellet: rotsekventen er falsifiserbar.
- Induksjonssteget: følger fra Lemma.

Lemma.
La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ. Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ, så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.

Bevis.
Oppgave.

Teorem (Sunnhet).
Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

Kompletthet

Teorem (Kompletthet).
Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens).
Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Husk:

- En modell $\mathcal{M}$ *falsifiserer* $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for $\mathcal{M}$ gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.
- Hvis formlene i Γ og Δ er *lukkede*, vil sannhetsverdiene til formlene under $\mathcal{M}$ være *uavhengig av variabeltilordning*.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en *rettferdig strategi* til å konstruere en *grenseutledning* for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G, og
  - hvis G inneholder en γ-formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G.
  - *"Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener."*
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må grenseutledningen inneholde en *åpen* gren G (ved Königs lemma).

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G: $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$.

- Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^\top$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^\perp$.
- I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
- I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i $G^\top$ eller $G^\perp$.

- Det følger at $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$, siden $\Gamma \subseteq G^\top$ og $\Delta \subseteq G^\perp$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^\top$ og falsifiserer alle formler i $G^\perp$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger per definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
  - For α-, β- og δ-formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G, og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G.
  - For γ-formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G.
- Siden delformlene er av enklere struktur enn φ, kan vi anta at påstanden holder for disse, og bruke semantikken til å slutte at påstanden holder for φ.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en *rettferdig strategi* til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en *grunn* substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den *grunnede* åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ-reglene imidlertid *frie variable* istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av *rettferdig strategi*.
- Vi må også velge den grunnende substitusjonen slik at den grunnede åpne grenen får samme egenskaper m.h.p. γ-formler som i grenseutledningen i grunn LK.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi).
En strategi er *rettferdig* hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

1. Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.
2. Hvis φ er en γ-formel på formen $Qx\psi$ i en gren, så er $\psi[u/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for *uendelig* mange variable u.

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$\begin{array}{r} \vdots \\ \forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa \\ \hline \forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa \\ \hline \forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa \\ \hline \forall xPx \vdash Qfa \end{array}$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.
- Vi ser at Herbrand-universet til $G\sigma$ er $a, fa, ffa, fffa, \ldots$ Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt *ikke* er i $G\sigma$, f.eks. $t = fa$.
- Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor *ikke* gjøre $\forall xPx$ sann.

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\begin{array}{r} \vdots \\ \forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa \\ \hline \forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa \\ \hline \forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa \\ \hline \forall xPx \vdash Qfa \end{array}$$

- Vi har nå at $Pt \in G\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til $G\tau$.
- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra $G\tau$ oppfylle $\forall xPx$.
- Vi kaller τ en *rettferdig substitusjon*.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon).
La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

- σ er *rettferdig m.h.p. en γ-formel* $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er *rettferdig m.h.p. grenen* G hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ-formlene i G.
- σ er *rettferdig m.h.p. utledningen* π hvis σ er rettferdig m.h.p. hver gren i π.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes *ingen* substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en *rettferdig strategi* til å lage en *grenseutledning* med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er *rettferdig* m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at $\mathsf{G}\sigma$ kun inneholder *lukkede* formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er *lukket*. Herbrand-modellen generert fra $\mathsf{G}\sigma$ vil derfor falsifisere $\Gamma \vdash \Delta$ uavhengig av variabeltilordning.