

INF3170 – Logikk

Forelesning 1: Introduksjon og mengdelære

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

26. januar 2010

(Sist oppdatert: 2010-01-26 14:58)



Velkommen til INF3710 – Logikk

Velkommen til INF3710 – Logikk

Litt praktisk informasjon

Obliger og eksamen

Pensum

Hva skal vi lære?

Mengdelære

Litt praktisk informasjon

- Forelesere
 - Roger Antonsen (rantonse@ifi.uio.no)
 - Kontor 2403, 2. etasje, Informatikkbygningen
 - Kurset gis på *dugnad* og det blir flere forelesere i løpet av semesteret.
- Forelesninger
 - Tirsdager 12:15–14:00
 - Lille auditorium
- Gruppeundervisning
 - Ingen gruppeundervisning.
- Nettside
 - <http://www.ifi.uio.no/inf3170/>

Obliger og eksamen

- Obligatoriske oppgaver
 - Sannsynligvis 2 obliger; mer informasjon kommer senere.
 - Se hjemmesiden for tidsfrister og regler.
 - Bedømmes til bestått/ikke bestått.
 - Alle obligene må bestås for å kunne gå opp til eksamen.
- Eksamen
 - Avsluttende eksamen: skriftlig *eller* muntlig.
 - Bokstavkarakterer – avsluttende eksamen teller 100%.

Pensum

- Pensum defineres av det som gjennomgås på forelesningene, samt det som deles ut av forelesningsnotater og oppgaver.
- Vi har ingen lærebok, men følgende kan være til nytte som støttelitteratur.
- Dette er ikke pensum, men frivillig ekstraslesing.



Jean Gallier.

Logic for Computer Science: Foundations of Automated Theorem Proving

- Ligger tett opptil forelest pensum i kurset.
- Oppdatert versjon fra 2003 tilgjengelig for gratis nedlasting.
- Kun kapitlene 3, 4, 5 og 8 er aktuelle.



Melvin C. Fitting.

First-Order Logic and Automated Theorem Proving

Hva skal vi lære?

Velkommen til INF3710 – Logikk

Hva skal vi lære?

Tenk deg en verden. . .
Sann-eller-usann-verden
Oversikt over kurset

Mengdelære

Tenk deg en verden. . .

. . . der setninger er enten **sanne** eller **usanne**.

Eksempel

Setning: “Ole liker logikk.”

- Hvis Ole liker logikk, så er setningen **sann**.
- Hvis Ole *ikke* liker logikk, så er setningen **usann**.
- Setningens sannhetsverdi avhenger av hvorvidt det er sant at Ole liker logikk.

Sann-eller-usann-verden

Eksempel

Setning: “Ole liker logikk **og** Ole liker programmering.”

- Hvis både “Ole liker logikk” og “Ole liker programmering” er **sanne**, så er setningen **sann**.
- Hvis “Ole liker logikk” eller “Ole liker programmering” er **usann**, så er setningen **usann**.
- Setningens sannhetsverdi avhenger av sannhetsverdien til “Ole liker logikk” og “Ole liker programmering”.

Sann-eller-usann-verden

Eksempel

Setning: “Ole liker logikk **eller** Ole liker **ikke** logikk.”

- Hvis “Ole liker logikk” er **usann**, så er “Ole liker **ikke** logikk” **sann**.
- Hvis “Ole liker logikk” er **sann**, så er “Ole liker **ikke** logikk” **usann**.
- Setningens sannhetsverdi er helt uavhengig av sannhetsverdien til “Ole liker logikk”!
- Det er umulig å gjøre setningen **usann**, den er **sann** på grunn av måten den er konstruert på.

Oversikt over kurset

- **Logisk symbolspråk** – bygge opp formelle setninger.
- **Semantikk** – en presis måte å tolke formelle setninger på.
- **Logisk kalkyle** – regneregler for å finne ut om en formell setning alltid er sann uavhengig av tolkning.
- **Sunnhet og kompletthet** av logiske kalkyler.
- Nyttige teknikker for å lage søkealgoritmer for logiske kalkyler.
- Andre emner fra logikkens verden (hvis vi får tid).

Oppgave

Setning: “Det fins en person x slik at hvis x liker logikk så liker alle personer logikk.”

- Er det mulig å gjøre denne setningen **usann**. . . ?

Mengdelære

Velkommen til INF3710 – Logikk

Hva skal vi lære?

Mengdelære

Mengder

Relasjoner

Funksjoner

Operatorer

Mengder

Definisjon

- En **mengde** er en endelig eller uendelig samling objekter der innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt ignoreres.
- Objektene i en mengde kalles **elementer**.
- Hvis a er element i mengden S , skriver vi $a \in S$. Hvis a *ikke* er element i S , skriver vi $a \notin S$.
- To mengder S og T er **like**, $S = T$, hvis de inneholder de samme elementene.

Notasjon

Mengden med elementene a , b , c og d skrives ofte $\{a, b, c, d\}$.

Mengder

Eksempel

(Antagelse: $a, b, c, d, 1, 2, \gamma$ og Φ er alle forskjellige.)

- $a \in \{a, b, c\}$
- $d \notin \{a, b, c\}$
- $1 \in \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $2 \notin \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a, a, b\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \neq \{b, c\}$ (mengdene er **ulike**)

Noen spesielle mengder

Definisjon (Den tomme mengden)

- Den **tomme mengden** er mengden som ikke inneholder noen elementer.
- Skrives ofte $\{\}$ eller \emptyset .

Definisjon (Singletonmengde)

En **singletonmengde** er en mengde som har nøyaktig ett element.

Eksempel

Både $\{a\}$, $\{b\}$ og $\{b, b\}$ er singletonmengder.

Union – slå sammen mengder

Definisjon (Union)

- **Unionen** av to mengder S og T er den mengden som inneholder alle objekter som er element i S eller T .
- Unionen av S og T skrives ofte $S \cup T$.

Eksempel

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3\}$

Snitt – felles elementer

Definisjon (Snitt)

- Hvis S og T er mengder, så er **snittet** mellom S og T , eller S snittet med T , mengden som inneholder alle objekter som er element i både S og T .
- S snittet med T skrives ofte $S \cap T$.

Eksempel

- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \emptyset = \emptyset$

Mengdedifferanse – fjern elementer

Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis S og T er mengder, så er **mengdedifferansen** mellom S og T , eller S minus T , mengden som inneholder alle objekter som er element i S men *ikke* element i T .
- S minus T skrives ofte $S \setminus T$.

Eksempel

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \emptyset = \{1, 2, 3\}$
- $\emptyset \setminus \{a, b, c\} = \emptyset$

Delmengde

Definisjon (Delmengde)

- En mengde S er en **delmengde** av en mengde T hvis alle elementer i S også er elementer i T .
- Skrives ofte $S \subseteq T$.

Eksempel

- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$ (enhver mengde er en delmengde av seg selv)
- $\{a, b, c\} \not\subseteq \{a, b\}$
- $\emptyset \subseteq \{a, b\}$ (den tomme mengden er en delmengde av alle mengder)
- $\{a, b\} \not\subseteq \emptyset$

Kryssprodukt

Definisjon (Kryssprodukt)

- Hvis S og T er mengder, så er **kryssproduktet** av S og T mengden av alle **par** $\langle s, t \rangle$ slik at $s \in S$ og $t \in T$.
- Kryssproduktet av S og T skrives ofte $S \times T$.

Eksempel

- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$
- $\{a, b\} \times \{b, c\} = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$
- $\{a\} \times \{1, 2\} = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle\}$

Kryssprodukt

Notasjon

- En mengde kan krysses med seg selv: $S \times S$
- $\{a, b\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$
- $S \times S \times S$ skrives ofte S^3 .
- Generalisert: $\underbrace{S \times S \times \dots \times S}_n$ skrives S^n .

Mengdebygger

Notasjon

En definisjon på formen “mengden av alle elementer $x \in S$ slik at ...” kan skrives på formen

$$\{x \mid x \in S \text{ og betingelse på } x\}.$$

En slik konstruksjon kalles en **mengdebygger**.

Eksempel

- Definisjonen av kryssprodukt av S og T kunne vært skrevet slik:

$$S \times T = \{\langle s, t \rangle \mid s \in S \text{ og } t \in T\}$$

- $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ og } n \text{ er partall}\}$ definerer mengden av alle partall.
- $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ og } n \text{ er oddetall}\}$ definerer mengden av alle oddetall.

Mengder av mengder

Det er mulig å konstruere mengder som inneholder andre mengder (med visse restriksjoner).

Eksempel

- $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \{\{m \mid 0 \leq m \leq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\}$

Snitt av mengder av mengder

Definisjon

Snittet av en mengde \mathcal{M} av mengder inneholder alle elementer som er element av alle $M \in \mathcal{M}$:

$$\bigcap \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for alle } M \in \mathcal{M}\}$$

Eksempel

- $\bigcap \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \{0\}$
- $\bigcap \{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\} = \emptyset$

Union av mengder av mengder

Definisjon

Unionen av en mengde \mathcal{M} av mengder inneholder alle elementer som er element av minst en $M \in \mathcal{M}$:

$$\bigcup \mathcal{M} := \{x \mid x \in M \text{ for noen } M \in \mathcal{M}\}$$

Eksempel

- $\bigcup \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \mathbb{N}$
- $\bigcup \{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\} = \mathbb{N}$

Relasjoner

Definisjon (Relasjon)

- En **unær relasjon** over S er en delmengde av S .
- En **binær relasjon** fra S til T er en delmengde av $S \times T$.
- En **n -ær relasjon** over mengdene S_1, S_2, \dots, S_n er en delmengde av kryssproduktet $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$.

Eksempel

- Hvis $S = \{a, b, c\}$, så er $\{a, b\}$ en unær relasjon over S .
- Hvis $S = \{a, b\}$ og $T = \{1, 2\}$, så er $\{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$ en binær relasjon fra S til T .

Relasjoner over én mengde

Definisjon

En **n-ær relasjon** over mengden S er en delmengde av S^n .

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon over S .
- $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ er også en binær relasjon over S .

Refleksive relasjoner

Definisjon (Refleksiv)

En binær relasjon R over mengden S er **refleksiv** hvis $\langle x, x \rangle \in R$ for alle $x \in S$.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ refleksiv?
- Hva med $R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$?

Symmetriske relasjoner

Definisjon (Symmetrisk)

En binær relasjon R er **symmetrisk** hvis $\langle x, y \rangle \in R$ impliserer at $\langle y, x \rangle \in R$.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ symmetrisk?
- Hva med $R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$?

Anti-symmetriske relasjoner

Definisjon (Anti-symmetrisk)

En binær relasjon R over mengden S er **anti-symmetrisk** hvis $\langle x, y \rangle \in R$ og $\langle y, x \rangle \in R$ impliserer at $x = y$.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ anti-symmetrisk?
- Hva med $R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$?

Transitive relasjoner

Definisjon (Transitiv)

En binær relasjon R er **transitiv** hvis $\langle x, y \rangle \in R$ og $\langle y, z \rangle \in R$ impliserer at $\langle x, z \rangle \in R$.

Definisjon (Ekvivalensrelasjon)

En binær relasjon over mengden S er en **ekvivalensrelasjon** hvis den er reflektiv, symmetrisk og transitiv.

Funksjoner

Definisjon (Funksjon)

La S og T være mengder. En **funksjon** f fra S til T er en binær relasjon fra S til T med følgende egenskaper:

- For alle $x \in S$ så finnes en $y \in T$ slik at $\langle x, y \rangle \in f$.
- Hvis $\langle x, y \rangle \in f$ og $\langle x, z \rangle \in f$, så er $y = z$.

Vi kaller S for **definisjonsmengden** til f og T for **verdimengden** til f .

Notasjon

Hvis $\langle x, y \rangle \in f$, så skriver vi ofte $f(x) = y$.

Funksjoner

Eksempel

Funksjonen $\text{Par} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ definert ved

$$\text{Par}(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er et partall} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er et oddetall} \end{cases}$$

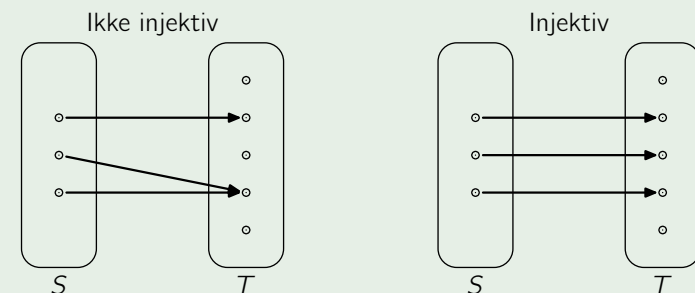
har \mathbb{N} som definisjonsmengde og $\{0, 1\}$ som verdimengde.

Injektive funksjoner

Definisjon (Injektiv)

En funksjon $f : S \rightarrow T$ er **injektiv** hvis for alle $x, y \in S$ så impliserer $x \neq y$ at $f(x) \neq f(y)$. Vi sier at f er **en-til-en**.

Eksempel

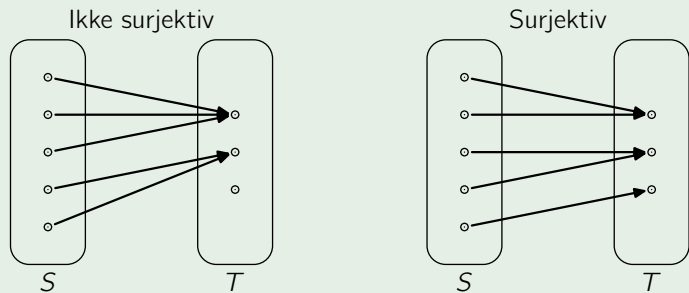


Surjektive funksjoner

Definisjon (Surjektiv)

En funksjon $f : S \rightarrow T$ er **surjektiv** hvis for alle $y \in T$ så fins $x \in S$ slik at $f(x) = y$. Vi sier at f er **på**.

Eksempel



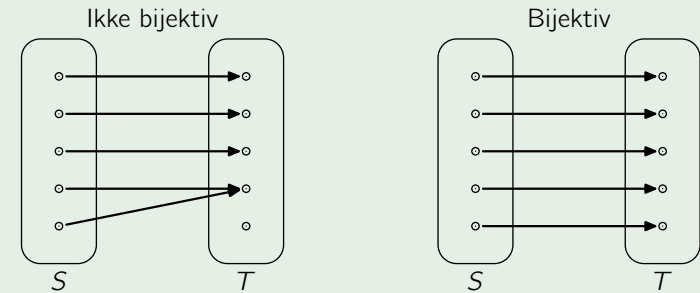
Bijektive funksjoner

Definisjon (Bijektiv)

En funksjon er **bijektiv** hvis den er injektiv og surjektiv.

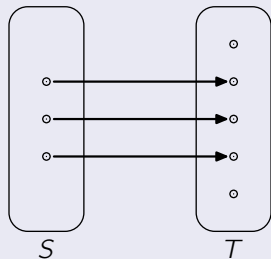
Vi sier at funksjonen er **en-til-en** og **på**, eller at vi har en **en-til-en korrespondanse**.

Eksempel



Injektive og surjektive funksjoner

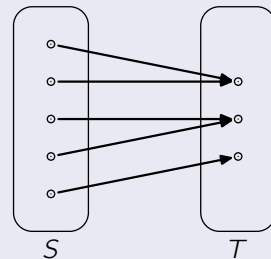
injektiv / en-til-en



for alle $x, y \in S$:
 $x \neq y$ impliserer $f(x) \neq f(y)$

hvert element i definisjonsmengden sendes til et unikt element i verdimengden

surjektiv / på

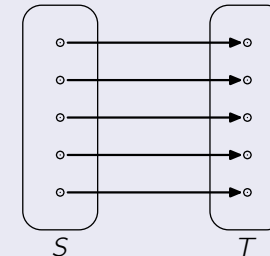


for alle $y \in T$:
det finnes $x \in S$ slik at $f(x) = y$

alle elementer i verdimengden blir truffet

Bijektive funksjoner

bijektiv / en-til-en og på / en-til-en korrespondanse



- En **bijektiv** funksjon er en funksjon som er både *injektiv* og *surjektiv*:
- “Ethvert element i verdimengden blir truffet av et unikt element i definisjonsmengden”.

Operatorer

Definisjon (Operator)

La S være en mengde.

- En **unær operator** på S er en funksjon fra S til S .
- En **binær operator** på S er en funksjon fra $S \times S$ til S .

Eksempel

- Suksessorfunksjonen $(n + 1)$ er en unær operator på \mathbb{N} .
- Addisjonsfunksjonen $(+)$ er en binær operator på \mathbb{N} .
- Subtraksjonsfunksjonen $(-)$ er en binær operator på \mathbb{Z} .