INF3170 – Logikk

Forelesning 2: Mengdelære, induktive definisjoner og utsagnslogikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

2. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-02 14:27)

Litt mer mengdelære

Litt mer mengdelære

- Multimengder
- Kardinalitet
- Tellbart versus overtellbart

Induktive definisjoner og bevis

Utsagnslogikk

Multimengder

Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

Definisjon (Multimengde)

En multimengde er et par $\langle S, m \rangle$ der S er en mengde og $m : S \to \mathbb{N}$. For hver $x \in S$ sier vi at $m(x)$ er multiplisiteten til x, eller antall forekomster av x i S.

Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

Definisjon (Multimengde)

En multimengde er et par $\langle S, m\rangle$ der S er en mengde og $m : S \to \mathbb{N}$. For hver $x \in S$ sier vi at $m(x)$ er multiplisiteten til x, eller antall forekomster av x i S.

Eksempel

Vi skriver multimengder som mengder:

Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

Definisjon (Multimengde)

En multimengde er et par $\langle S, m \rangle$ der S er en mengde og $m : S \to \mathbb{N}$. For hver $x \in S$ sier vi at $m(x)$ er multiplisiteten til x, eller antall forekomster av x i S.

Eksempel

Vi skriver multimengder som mengder:

- I multimengden $\{a, a, a, b, b\}$ er multiplisiteten til a og b henholdsvis 3 og 2.

Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

Definisjon (Multimengde)

En multimengde er et par $\langle S, m \rangle$ der S er en mengde og $m : S \to \mathbb{N}$. For hver $x \in S$ sier vi at $m(x)$ er multiplisiteten til x, eller antall forekomster av x i S.

Eksempel

Vi skriver multimengder som mengder:

- I multimengden $\{a, a, a, b, b\}$ er multiplisiteten til a og b henholdsvis 3 og 2.
- I multimengden $\{a, b, a, c, a, b\}$ er multiplisiteten til a, b og c henholdsvis 3, 2 og 1.

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$
  dvs. $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$
  dvs. $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$
  dvs. $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$
  dvs. $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$
  dvs. $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$
  dvs. $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$
  dvs. $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$
  dvs. $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$
  dvs. $m(x) = \max(0, m_1(x) - m_2(x))$

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$
  dvs. $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$
  dvs. $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$
  dvs. $m(x) = \max(0, m_1(x) - m_2(x))$
- $\{a, a\} \subseteq \{a, a, b, c\}$, men $\{a, a, a\} \not\subseteq \{a, a, b, c\}$

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$
  dvs. $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$
  dvs. $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$
  dvs. $m(x) = \max(0, m_1(x) - m_2(x))$
- $\{a, a\} \subseteq \{a, a, b, c\}$, men $\{a, a, a\} \nsubseteq \{a, a, b, c\}$
  dvs. $m_1(x) \leqslant m_2(x)$ for alle x.

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker union ($\cup$), snitt ($\cap$), mengdedifferans ($\setminus$) og delmengderelasjonen ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$
  dvs. $m(x) = m_1(x) + m_2(x)$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$
  dvs. $m(x) = \min(m_1(x), m_2(x))$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$
  dvs. $m(x) = \max(0, m_1(x) - m_2(x))$
- $\{a, a\} \subseteq \{a, a, b, c\}$, men $\{a, a, a\} \not\subseteq \{a, a, b, c\}$
  dvs. $m_1(x) \leqslant m_2(x)$ for alle x.

- Vi bruker $\emptyset$ om den tomme multimengden.

Kardinalitet

Kardinalitet

Definisjon (Kardinalitet)

Kardinalitet

Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder S og T har lik kardinalitet hvis det fins en bijeksjon fra S til T.

Kardinalitet

Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder S og T har lik kardinalitet hvis det fins en bijeksjon fra S til T.
- Mengden S har kardinalitet mindre eller lik T hvis det fins en injektiv funksjon fra S til T.

Kardinalitet

Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder S og T har lik kardinalitet hvis det fins en bijeksjon fra S til T.
- Mengden S har kardinalitet mindre eller lik T hvis det fins en injektiv funksjon fra S til T.
- Hvis S er en endelig mengde, så er kardinaliteten til S lik antall elementer i S.

Kardinalitet

Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder S og T har lik kardinalitet hvis det fins en bijeksjon fra S til T.
- Mengden S har kardinalitet mindre eller lik T hvis det fins en injektiv funksjon fra S til T.
- Hvis S er en endelig mengde, så er kardinaliteten til S lik antall elementer i S.
- Vi bruker notasjonen $|S|$ for kardinaliteten til S.

Kardinalitet

Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder S og T har lik kardinalitet hvis det fins en bijeksjon fra S til T.
- Mengden S har kardinalitet mindre eller lik T hvis det fins en injektiv funksjon fra S til T.
- Hvis S er en endelig mengde, så er kardinaliteten til S lik antall elementer i S.
- Vi bruker notasjonen $|S|$ for kardinaliteten til S.

Teorem (Bernstein)

Hvis det finnes en injektiv funksjon $f : S \to T$ og en injektiv funksjon $g : T \to S$, så fins det også en bijeksjon $h : S \to T$.

Kardinalitet

Kardinalitet

Eksempel

Hva er kardinaliteten til

Kardinalitet

Eksempel

Hva er kardinaliteten til

- $\{a, b, c\}$?

Kardinalitet

Eksempel

Hva er kardinaliteten til

- $\{a, b, c\}$?
- $\{a, b, a\}$?

Kardinalitet

Eksempel

Hva er kardinaliteten til

- $\{a, b, c\}$?
- $\{a, b, a\}$?
- $\{a\}$?

Kardinalitet

Eksempel

Hva er kardinaliteten til

- $\{a, b, c\}$?
- $\{a, b, a\}$?
- $\{a\}$?
- $\emptyset$?

Kardinalitet

Kardinalitet

Eksempel

Kardinalitet

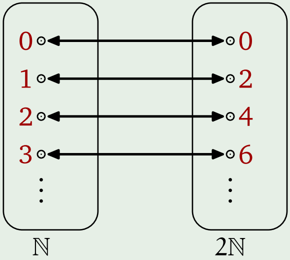
Eksempel

- $\mathbb{N}$ = mengden av alle naturlige tall $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Kardinalitet

Eksempel

- $\mathbb{N}$ = mengden av alle naturlige tall $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $2\mathbb{N}$ = mengden av alle partall $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$



Kardinalitet

Eksempel

- $\mathbb{N}$ = mengden av alle naturlige tall $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $2\mathbb{N}$ = mengden av alle partall $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$f(x) = 2x$ er en bijeksjon fra $\mathbb{N}$ til $2\mathbb{N}$, så $\mathbb{N}$ og $2\mathbb{N}$ har samme kardinalitet.

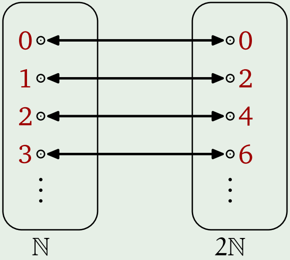
$$\begin{array}{ccc} 0 & \longleftrightarrow & 0 \\ 1 & \longleftrightarrow & 2 \\ 2 & \longleftrightarrow & 4 \\ 3 & \longleftrightarrow & 6 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{N} & & 2\mathbb{N} \end{array}$$

Kardinalitet

Eksempel

- $\mathbb{N}$ = mengden av alle naturlige tall $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $2\mathbb{N}$ = mengden av alle partall $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$f(x) = 2x$ er en bijeksjon fra $\mathbb{N}$ til $2\mathbb{N}$, så $\mathbb{N}$ og $2\mathbb{N}$ har samme kardinalitet. Vi skriver $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$.



Tellbart versus overtellbart

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene.

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar.

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar.

- Alle endelige mengder er tellbare.

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde S er tellbar fins det en bijektiv funksjon fra S til $\mathbb{N}$.

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde S er tellbar fins det en bijektiv funksjon fra S til $\mathbb{N}$.

Eksempel

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde S er tellbar fins det en bijektiv funksjon fra S til $\mathbb{N}$.

Eksempel

- Mengden $2\mathbb{N}$ av alle partall er tellbar.

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde S er tellbar fins det en bijektiv funksjon fra S til $\mathbb{N}$.

Eksempel

- Mengden $2\mathbb{N}$ av alle partall er tellbar.
- Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall er tellbar.

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde S er tellbar fins det en bijektiv funksjon fra S til $\mathbb{N}$.

Eksempel

- Mengden $2\mathbb{N}$ av alle partall er tellbar.
- Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall er tellbar.
- Mengden $\mathbb{Q}$ av brøktall er tellbar.

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde S er tellbar fins det en bijektiv funksjon fra S til $\mathbb{N}$.

Eksempel

- Mengden $2\mathbb{N}$ av alle partall er tellbar.
- Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall er tellbar.
- Mengden $\mathbb{Q}$ av brøktall er tellbar.
- Mengden av nålevende mennesker er tellbar.

Tellbart versus overtellbart

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar.

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde S er tellbar fins det en bijektiv funksjon fra S til $\mathbb{N}$.

Eksempel

- Mengden $2\mathbb{N}$ av alle partall er tellbar.
- Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall er tellbar.
- Mengden $\mathbb{Q}$ av brøktall er tellbar.
- Mengden av nålevende mennesker er tellbar.
- Mengden $\mathbb{R}$ av reelle tall er ikke tellbar.

Induktive definisjoner og bevis

Litt mer mengdelære

Induktive definisjoner og bevis

- Induktive definisjoner
- Rekursive funksjoner
- Induktive bevis

Utsagnslogikk

Induktive definisjoner

Induktive definisjoner

Definisjon (Induktiv definisjon)

Å definere en mengde induktivt betyr å konstruere den minste mengden som inneholder en gitt mengde B—kalt en basismengde—og som er lukket under gitte operasjoner.

Induktive definisjoner

Definisjon (Induktiv definisjon)

Å definere en mengde induktivt betyr å konstruere den minste mengden som inneholder en gitt mengde B—kalt en basismengde—og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Mengden $\mathbb{N}$ av naturlige tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{N}$ som er slik at

Induktive definisjoner

Definisjon (Induktiv definisjon)

Å definere en mengde induktivt betyr å konstruere den minste mengden som inneholder en gitt mengde B—kalt en basismengde—og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Mengden $\mathbb{N}$ av naturlige tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{N}$ som er slik at

- $0 \in \mathbb{N}$, og

Induktive definisjoner

Definisjon (Induktiv definisjon)

Å definere en mengde induktivt betyr å konstruere den minste mengden som inneholder en gitt mengde B—kalt en basismengde—og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Mengden $\mathbb{N}$ av naturlige tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{N}$ som er slik at

- $0 \in \mathbb{N}$, og
- hvis $x \in \mathbb{N}$, så $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Induktive definisjoner

Definisjon (Induktiv definisjon)

Å definere en mengde induktivt betyr å konstruere den minste mengden som inneholder en gitt mengde B—kalt en basismengde—og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Mengden $\mathbb{N}$ av naturlige tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{N}$ som er slik at

- $0 \in \mathbb{N}$, og
- hvis $x \in \mathbb{N}$, så $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Her er basismengden $\{0\}$ og $\mathbb{N}$ er lukket under suksessorfunksjonen (x+1).

Eksempel

Eksempel

Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{B}$ som er slik at

Eksempel

Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{B}$ som er slik at

- 0 og 1 er binære tall, og

Eksempel

Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{B}$ som er slik at

- $\mathtt{0}$ og $\mathtt{1}$ er binære tall, og
- hvis $\mathtt{b}$ er et binært tall, så er $\mathtt{b0}$ og $\mathtt{b1}$ binære tall.

Eksempel

Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{B}$ som er slik at

- $\mathtt{0}$ og $\mathtt{1}$ er binære tall, og
- hvis $\mathtt{b}$ er et binært tall, så er $\mathtt{b0}$ og $\mathtt{b1}$ binære tall.

steg 0: $\mathtt{0}$ $\mathtt{1}$

Eksempel

Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{B}$ som er slik at

- $\mathtt{0}$ og $\mathtt{1}$ er binære tall, og
- hvis $\mathtt{b}$ er et binært tall, så er $\mathtt{b0}$ og $\mathtt{b1}$ binære tall.

steg 0:	0	1		
steg 1:	00	10	01	11

Eksempel

Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{B}$ som er slik at

- $\mathtt{0}$ og $\mathtt{1}$ er binære tall, og
- hvis $\mathtt{b}$ er et binært tall, så er $\mathtt{b0}$ og $\mathtt{b1}$ binære tall.

steg 0:	0	1						
steg 1:	00	10	01	11				
steg 2:	000	100	010	110	001	101	011	111

Eksempel

Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{B}$ som er slik at

- $\mathtt{0}$ og $\mathtt{1}$ er binære tall, og
- hvis $\mathtt{b}$ er et binært tall, så er $\mathtt{b0}$ og $\mathtt{b1}$ binære tall.

$$
\begin{array}{lllllllll}
\text{steg 0:} & 0 & 1 \\
\text{steg 1:} & 00 & 10 & 01 & 11 \\
\text{steg 2:} & 000 & 100 & 010 & 110 & 001 & 101 & 011 & 111 \\
\vdots
\end{array}
$$

Eksempel

Eksempel

Mengden S av symmetriske strenger over alfabetet $\{a, b\}$ kan defineres induktivt som den minste mengden S som er slik at

Eksempel

Mengden S av symmetriske strenger over alfabetet $\{a, b\}$ kan defineres induktivt som den minste mengden S som er slik at

- $\epsilon \in S$ (den tomme strengen),

Eksempel

Mengden S av symmetriske strenger over alfabetet $\{a, b\}$ kan defineres induktivt som den minste mengden S som er slik at

- $\epsilon \in S$ (den tomme strengen),
- hvis $x \in S$, så $axa \in S$ og $bxb \in S$.

Eksempel

Mengden S av symmetriske strenger over alfabetet $\{a, b\}$ kan defineres induktivt som den minste mengden S som er slik at

- $\epsilon \in S$ (den tomme strengen),
- hvis $x \in S$, så $axa \in S$ og $bxb \in S$.

steg 0: ϵ

Eksempel

Mengden S av symmetriske strenger over alfabetet $\{a, b\}$ kan defineres induktivt som den minste mengden S som er slik at

- $\epsilon \in S$ (den tomme strengen),
- hvis $x \in S$, så $axa \in S$ og $bxb \in S$.

steg 0:	ϵ	
steg 1:	aa	bb

Eksempel

Mengden S av symmetriske strenger over alfabetet $\{a, b\}$ kan defineres induktivt som den minste mengden S som er slik at

- $\epsilon \in S$ (den tomme strengen),
- hvis $x \in S$, så $axa \in S$ og $bxb \in S$.

steg 0:	ϵ			
steg 1:	aa	bb		
steg 2:	$aaaa$	$abba$	$baab$	$bbbb$

Eksempel

Mengden S av symmetriske strenger over alfabetet $\{a, b\}$ kan defineres induktivt som den minste mengden S som er slik at

- $\epsilon \in S$ (den tomme strengen),
- hvis $x \in S$, så $axa \in S$ og $bxb \in S$.

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{steg 0:} & \epsilon & & & \\
\text{steg 1:} & aa & bb & & \\
\text{steg 2:} & aaaa & abba & baab & bbbb \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Hvorfor den minste mengden?

Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer basismengden B og som er lukket under gitte operasjoner.

Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer basismengden B og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer basismengden $\mathbb{B}$ og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Hvilke mengder $\mathbb{N}$ oppfyller:

Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer basismengden B og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Hvilke mengder N oppfyller:

- $0 \in N$, og

Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer basismengden B og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Hvilke mengder N oppfyller:

- $0 \in N$, og
- hvis $x \in N$, så $x + 1 \in N$?

Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer basismengden B og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Hvilke mengder N oppfyller:

- $0 \in N$, og
- hvis $x \in N$, så $x + 1 \in N$?

For eksempel:

Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer basismengden B og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Hvilke mengder N oppfyller:

- $0 \in N$, og
- hvis $x \in N$, så $x + 1 \in N$?

For eksempel:

- $\mathbb{N}$

Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer basismengden B og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Hvilke mengder N oppfyller:

- $0 \in N$, og
- hvis $x \in N$, så $x + 1 \in N$?

For eksempel:

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$

Hvorfor den minste mengden?

Det er mange mengder som inkluderer basismengden B og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Hvilke mengder N oppfyller:

- $0 \in N$, og
- hvis $x \in N$, så $x + 1 \in N$?

For eksempel:

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$
- $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\}$

Hva betyr egentlig ‘minst’?

Hva betyr egentlig 'minst'?

- La
$$S := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$

Hva betyr egentlig ‘minst’?

- La
$$S := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$
- S inneholder alle M som oppfyller kravene

Hva betyr egentlig 'minst'?

- La
$$S := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$
- S inneholder alle M som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:
$$M^* := \bigcap S$$

Hva betyr egentlig 'minst'?

- La
$$S := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$
- S inneholder alle M som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:
$$M^* := \bigcap S$$
- Da er $M^* \in S$.

Hva betyr egentlig ‘minst’?

- La
$$S := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$
- S inneholder alle M som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:
$$M^* := \bigcap S$$
- Da er $M^* \in S$.
- Også er $M^* \subseteq M$ for alle $M \in S$.

Hva betyr egentlig 'minst'?

- La
$$S := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$
- S inneholder alle M som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:
$$M^* := \bigcap S$$
- Da er $M^* \in S$.
- Også er $M^* \subseteq M$ for alle $M \in S$.
- Hvis det fins en mengde $N \in S$ som er slik at $N \subseteq M$ for alle $M \in S$, så er $N = M^*$.

Hva betyr egentlig 'minst'?

- La
$$S := \{M \mid B \subseteq M \text{ og } M \text{ er lukket under operasjonene}\}$$
- S inneholder alle M som oppfyller kravene
- Ta snittet av alle sånne mengder:
$$M^* := \bigcap S$$
- Da er $M^* \in S$.
- Også er $M^* \subseteq M$ for alle $M \in S$.
- Hvis det fins en mengde $N \in S$ som er slik at $N \subseteq M$ for alle $M \in S$, så er $N = M^*$.
- M^* er altså den entydig minste mengden i S med hensyn til $\subseteq$.

Rekursive funksjoner

Rekursive funksjoner

Hvis en mengde M er definert induktivt, så er det naturlig å definere rekursive funksjoner fra M til en mengde X på følgende måte.

Eksempel

Definer funksjonen $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursivt ved

Rekursive funksjoner

Hvis en mengde M er definert induktivt, så er det naturlig å definere rekursive funksjoner fra M til en mengde X på følgende måte.

Eksempel

Definer funksjonen $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rekursivt ved

- $d(0) = 0$, og

Rekursive funksjoner

Hvis en mengde M er definert induktivt, så er det naturlig å definere rekursive funksjoner fra M til en mengde X på følgende måte.

Eksempel

Definer funksjonen $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursivt ved

- $d(0) = 0$, og
- $d(n+1) = d(n) + 1 + 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel (Verdien til et binært tall)

Eksempel (Verdien til et binært tall)

- $v(0) = 0$

Eksempel (Verdien til et binært tall)

- $v(0) = 0$
- $v(1) = 1$

Eksempel (Verdien til et binært tall)

- $v(0) = 0$
- $v(1) = 1$
- $v(b0) = 2v(b)$, for alle $b \in \mathbb{B}$

Eksempel (Verdien til et binært tall)

- $v(0) = 0$
- $v(1) = 1$
- $v(\mathtt{b}0) = 2v(\mathtt{b})$, for alle $\mathtt{b} \in \mathbb{B}$
- $v(\mathtt{b}1) = 2v(\mathtt{b}) + 1$, for alle $\mathtt{b} \in \mathbb{B}$

Eksempel (Verdien til et binært tall)

- $v(0) = 0$
- $v(1) = 1$
- $v(b0) = 2v(b)$, for alle $b \in \mathbb{B}$
- $v(b1) = 2v(b) + 1$, for alle $b \in \mathbb{B}$

Eksempel (Lengden av symmetrisk streng)

Eksempel (Verdien til et binært tall)

- $v(0) = 0$
- $v(1) = 1$
- $v(b0) = 2v(b)$, for alle $b \in \mathbb{B}$
- $v(b1) = 2v(b) + 1$, for alle $b \in \mathbb{B}$

Eksempel (Lengden av symmetrisk streng)

- $l(\epsilon) = 0$

Eksempel (Verdien til et binært tall)

- $v(0) = 0$
- $v(1) = 1$
- $v(b0) = 2v(b)$, for alle $b \in \mathbb{B}$
- $v(b1) = 2v(b) + 1$, for alle $b \in \mathbb{B}$

Eksempel (Lengden av symmetrisk streng)

- $l(\epsilon) = 0$
- $l(axa) = l(x) + 2$, for alle $x \in S$

Eksempel (Verdien til et binært tall)

- $v(0) = 0$
- $v(1) = 1$
- $v(b0) = 2v(b)$, for alle $b \in \mathbb{B}$
- $v(b1) = 2v(b) + 1$, for alle $b \in \mathbb{B}$

Eksempel (Lengden av symmetrisk streng)

- $l(\epsilon) = 0$
- $l(axa) = l(x) + 2$, for alle $x \in S$
- $l(bxb) = l(x) + 2$, for alle $x \in S$

Induktive bevis

Induktive bevis

For å vise at alle naturlige tall $n \in \mathbb{N}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$ er sann.

Induktive bevis

For å vise at alle naturlige tall $n \in \mathbb{N}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$ er sann.
- For alle $n \in \mathbb{N}$ som er slik at $P(n)$ er sann, vis at $P(n+1)$ er sann.

Induktive bevis

For å vise at alle naturlige tall $n \in \mathbb{N}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$ er sann.
- For alle $n \in \mathbb{N}$ som er slik at $P(n)$ er sann, vis at $P(n+1)$ er sann.

Eksempel

For å vise at $d(n) = 2n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ stå for "$d(n) = 2n$".

Induktive bevis

For å vise at alle naturlige tall $n \in \mathbb{N}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$ er sann.
- For alle $n \in \mathbb{N}$ som er slik at $P(n)$ er sann, vis at $P(n+1)$ er sann.

Eksempel

For å vise at $d(n) = 2n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ stå for "$d(n) = 2n$".

- Vis først at $P(0)$ er sann:

Induktive bevis

For å vise at alle naturlige tall $n \in \mathbb{N}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$ er sann.
- For alle $n \in \mathbb{N}$ som er slik at $P(n)$ er sann, vis at $P(n+1)$ er sann.

Eksempel

For å vise at $d(n) = 2n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ stå for "$d(n) = 2n$".

- Vis først at $P(0)$ er sann: $d(0) = 2 \cdot 0$ ved defininsjonen av d.

Induktive bevis

For å vise at alle naturlige tall $n \in \mathbb{N}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$ er sann.
- For alle $n \in \mathbb{N}$ som er slik at $P(n)$ er sann, vis at $P(n+1)$ er sann.

Eksempel

For å vise at $d(n) = 2n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, la $P(n)$ stå for "$d(n) = 2n$".

- Vis først at $P(0)$ er sann: $d(0) = 2 \cdot 0$ ved defininsjonen av d.
- Anta at $P(n)$ er sann, dvs. at $d(n) = 2n$, og vis at $P(n+1)$ er sann, dvs. at $d(n+1) = 2(n+1)$.

Induktive bevis

Induktive bevis

For å vise at alle binære tall $\mathtt{b} \in \mathbb{B}$ har en egenskap $\mathtt{P}$:

- Vis at egenskapen holder for $\mathtt{0}$, dvs. at $\mathtt{P}(\mathtt{0})$.

Induktive bevis

For å vise at alle binære tall $b \in \mathbb{B}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$.
- Vis at egenskapen holder for 1, dvs. at $P(1)$.

Induktive bevis

For å vise at alle binære tall $\mathtt{b} \in \mathbb{B}$ har en egenskap $\mathtt{P}$:

- Vis at egenskapen holder for $\mathtt{0}$, dvs. at $\mathtt{P(0)}$.
- Vis at egenskapen holder for $\mathtt{1}$, dvs. at $\mathtt{P(1)}$.
- For alle $\mathtt{b} \in \mathbb{B}$ med $\mathtt{P(b)}$, vis at $\mathtt{P(b0)}$.

Induktive bevis

For å vise at alle binære tall $b \in \mathbb{B}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$.
- Vis at egenskapen holder for 1, dvs. at $P(1)$.
- For alle $b \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b0)$.
- For alle $n \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b1)$.

Induktive bevis

For å vise at alle binære tall $b \in \mathbb{B}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$.
- Vis at egenskapen holder for 1, dvs. at $P(1)$.
- For alle $b \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b0)$.
- For alle $n \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b1)$.

For å vise at alle symmetriske strenger $x \in S$ har en egenskap P.

Induktive bevis

For å vise at alle binære tall $b \in \mathbb{B}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$.
- Vis at egenskapen holder for 1, dvs. at $P(1)$.
- For alle $b \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b0)$.
- For alle $n \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b1)$.

For å vise at alle symmetriske strenger $x \in S$ har en egenskap P.

- Vis at egenskapen holder for ϵ, dvs. at $P(\epsilon)$.

Induktive bevis

For å vise at alle binære tall $b \in \mathbb{B}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$.
- Vis at egenskapen holder for 1, dvs. at $P(1)$.
- For alle $b \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b0)$.
- For alle $n \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b1)$.

For å vise at alle symmetriske strenger $x \in S$ har en egenskap P.

- Vis at egenskapen holder for ϵ, dvs. at $P(\epsilon)$.
- For alle $x \in S$ med $P(x)$, vis at $P(axa)$.

Induktive bevis

For å vise at alle binære tall $b \in \mathbb{B}$ har en egenskap P:

- Vis at egenskapen holder for 0, dvs. at $P(0)$.
- Vis at egenskapen holder for 1, dvs. at $P(1)$.
- For alle $b \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b0)$.
- For alle $n \in \mathbb{B}$ med $P(b)$, vis at $P(b1)$.

For å vise at alle symmetriske strenger $x \in S$ har en egenskap P.

- Vis at egenskapen holder for ϵ, dvs. at $P(\epsilon)$.
- For alle $x \in S$ med $P(x)$, vis at $P(axa)$.
- For alle $x \in s$ med $P(x)$, vis at $P(bxb)$.

Induktive bevis

Induktive bevis

Eksempel

Induktive bevis

Eksempel

Vis at $v(b) = v(0b)$ for alle $b \in \mathbb{B}$.

Induktive bevis

Eksempel

Vis at $v(\mathtt{b}) = v(\mathtt{0b})$ for alle $\mathtt{b} \in \mathbb{B}$.

- La $\mathtt{P}(\mathtt{b})$ stå for "$v(\mathtt{b}) = v(\mathtt{0b})$".

Induktive bevis

Eksempel

Vis at $v(b) = v(0b)$ for alle $b \in \mathbb{B}$.

- La $P(b)$ stå for "$v(b) = v(0b)$".
- $P(0)$ er sann: $\quad v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$

Induktive bevis

Eksempel

Vis at $v(b) = v(0b)$ for alle $b \in \mathbb{B}$.

- La $P(b)$ stå for "$v(b) = v(0b)$".
- $P(0)$ er sann: $\quad v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$
- $P(1)$ er sann: $\quad v(1) = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2v(0) + 1 = v(01)$

Induktive bevis

Eksempel

Vis at $v(\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b})$ for alle $\mathrm{b} \in \mathbb{B}$.

- La $\mathrm{P}(\mathrm{b})$ stå for "$v(\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b})$".
- $\mathrm{P}(0)$ er sann: $\quad v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$
- $\mathrm{P}(1)$ er sann: $\quad v(1) = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2v(0) + 1 = v(01)$
- Anta at $\mathrm{P}(\mathrm{b})$ er sann, dvs. at $v(\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b})$.

Induktive bevis

Eksempel

Vis at $v(\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b})$ for alle $\mathrm{b} \in \mathbb{B}$.

- La $P(\mathrm{b})$ stå for "$v(\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b})$".
- $P(0)$ er sann: $v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$
- $P(1)$ er sann: $v(1) = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2v(0) + 1 = v(01)$
- Anta at $P(\mathrm{b})$ er sann, dvs. at $v(\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b})$.
    - $P(\mathrm{b}0)$ er sann: $v(\mathrm{b}0) = 2v(\mathrm{b}) = 2v(0\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b}0)$

Induktive bevis

Eksempel

Vis at $v(\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b})$ for alle $\mathrm{b} \in \mathbb{B}$.

- La $P(\mathrm{b})$ stå for "$v(\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b})$".
- $P(0)$ er sann: $\quad v(0) = 0 = 2 \cdot 0 = 2v(0) = v(00)$
- $P(1)$ er sann: $\quad v(1) = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2v(0) + 1 = v(01)$
- Anta at $P(\mathrm{b})$ er sann, dvs. at $v(\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b})$.
  - $P(\mathrm{b}0)$ er sann: $\quad v(\mathrm{b}0) = 2v(\mathrm{b}) = 2v(0\mathrm{b}) = v(0\mathrm{b}0)$
  - $P(\mathrm{b}1)$ er sann: $\quad v(\mathrm{b}1) = 2v(\mathrm{b}) + 1 = 2v(0\mathrm{b}) + 1 = v(0\mathrm{b}1)$

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P en egenskap.

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P en egenskap.
- Undersøk mengden N av alle x i M som er slik at $P(x)$ er sann.

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P en egenskap.
- Undersøk mengden N av alle x i M som er slik at $P(x)$ er sann.
- Se på et induktivt bevis.

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P en egenskap.
- Undersøk mengden N av alle x i M som er slik at $P(x)$ er sann.
- Se på et induktivt bevis.
    - Basissteg: $P(b)$ for alle $b \in B$

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P en egenskap.
- Undersøk mengden N av alle x i M som er slik at $P(x)$ er sann.
- Se på et induktivt bevis.
  - Basissteg: $P(b)$ for alle $b \in B$, og det betyr at $B \subseteq N$.

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P en egenskap.
- Undersøk mengden N av alle x i M som er slik at $P(x)$ er sann.
- Se på et induktivt bevis.
  - Basissteg: $P(b)$ for alle $b \in B$, og det betyr at $B \subseteq N$.
  - Induksjonssteg: $P(x)$ og $P(y)$ impliserer $P(f(x, y))$ for alle $x, y \in M$

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P en egenskap.
- Undersøk mengden N av alle x i M som er slik at $P(x)$ er sann.
- Se på et induktivt bevis.
  - Basissteg: $P(b)$ for alle $b \in B$, og det betyr at $B \subseteq N$.
  - Induksjonssteg: $P(x)$ og $P(y)$ impliserer $P(f(x, y))$ for alle $x, y \in M$, og det betyr at $f(x, y) \in N$ for alle $x, y \in N$.

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P en egenskap.
- Undersøk mengden N av alle x i M som er slik at $P(x)$ er sann.
- Se på et induktivt bevis.
  - Basissteg: $P(b)$ for alle $b \in B$, og det betyr at $B \subseteq N$.
  - Induksjonssteg: $P(x)$ og $P(y)$ impliserer $P(f(x, y))$ for alle $x, y \in M$, og det betyr at $f(x, y) \in N$ for alle $x, y \in N$.
- Men, da må $N \in S$, som vi definerte tidligere.

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P en egenskap.
- Undersøk mengden N av alle x i M som er slik at $P(x)$ er sann.
- Se på et induktivt bevis.
  - Basissteg: $P(b)$ for alle $b \in B$, og det betyr at $B \subseteq N$.
  - Induksjonssteg: $P(x)$ og $P(y)$ impliserer $P(f(x, y))$ for alle $x, y \in M$, og det betyr at $f(x, y) \in N$ for alle $x, y \in N$.
- Men, da må $N \in S$, som vi definerte tidligere.
- Siden M er minst i S, må $M \subseteq N$.

Hvorfor er strukturell induksjon korrekt?

- La M være en induktivt definert mengde og P en egenskap.
- Undersøk mengden N av alle x i M som er slik at $P(x)$ er sann.
- Se på et induktivt bevis.
  - Basissteg: $P(b)$ for alle $b \in B$, og det betyr at $B \subseteq N$.
  - Induksjonssteg: $P(x)$ og $P(y)$ impliserer $P(f(x, y))$ for alle $x, y \in M$, og det betyr at $f(x, y) \in N$ for alle $x, y \in N$.
- Men, da må $N \in S$, som vi definerte tidligere.
- Siden M er minst i S, må $M \subseteq N$.
- Med andre ord, $P(x)$ for alle $x \in M$.

Utsagnslogikk

Litt mer mengdelære

Induktive definisjoner og bevis

Utsagnslogikk

- Utsagnslogikk
- Syntaks
- Strukturell induksjon

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk er studiet av de utsagnslogiske konnektivene.

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk er studiet av de utsagnslogiske konnektivene.

- Vi starter med en mengde atomære utsagn, f.eks.

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk er studiet av de utsagnslogiske konnektivene.

- Vi starter med en mengde atomære utsagn, f.eks.
    - *"broen er stengt"*, og

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk er studiet av de utsagnslogiske konnektivene.

- Vi starter med en mengde atomære utsagn, f.eks.
  - *"broen er stengt"*, og
  - *"IFI2 bygges"*.

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk er studiet av de utsagnslogiske konnektivene.

- Vi starter med en mengde atomære utsagn, f.eks.
  - *"broen er stengt"*, og
  - *"IFI2 bygges"*.
- Den interne strukturen til atomære utsagn blir ikke analysert.

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk er studiet av de utsagnslogiske konnektivene.

- Vi starter med en mengde atomære utsagn, f.eks.
  - *"broen er stengt"*, og
  - *"IFI2 bygges"*.
- Den interne strukturen til atomære utsagn blir ikke analysert.
- Atomære utsagn er enten sanne eller usanne.

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*

Utsagnslogikk

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*
- Eksempel: *“IFI2 bygges og broen er stengt”*

Utsagnslogikk

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*
- Eksempel: *"IFI2 bygges og broen er stengt"*
- Hvordan avhenger sannhetsverdien til et sammensatt utsagn av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene det er bygget opp av?

Utsagnslogikk

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*
- Eksempel: *"IFI2 bygges og broen er stengt"*
- Hvordan avhenger sannhetsverdien til et sammensatt utsagn av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene det er bygget opp av?
- Hvilke utsagn er sanne *uavhengig* av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene?

Utsagnslogikk

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*
- Eksempel: *"IFI2 bygges og broen er stengt"*
- Hvordan avhenger sannhetsverdien til et sammensatt utsagn av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene det er bygget opp av?
- Hvilke utsagn er sanne *uavhengig* av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene?
- Slike utsagn kalles tautologier.

Utsagnslogikk

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*
- Eksempel: *"IFI2 bygges og broen er stengt"*
- Hvordan avhenger sannhetsverdien til et sammensatt utsagn av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene det er bygget opp av?
- Hvilke utsagn er sanne *uavhengig* av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene?
- Slike utsagn kalles tautologier.
- Eksempel: *"IFI2 bygges eller IFI2 bygges ikke"*

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.

Utsagnslogikk

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk: en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.

Utsagnslogikk

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk: en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- Kalkyle: syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne bevisbare uttrykk.

Utsagnslogikk

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk: en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- Kalkyle: syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne bevisbare uttrykk.
- Sunnhet: alle bevisbare uttrykk er tautologier — korrekthet av kalkylen.

Utsagnslogikk

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk: en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- Kalkyle: syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne bevisbare uttrykk.
- Sunnhet: alle bevisbare uttrykk er tautologier — korrekthet av kalkylen.
- Kompletthet: alle tautologier er bevisbare — kalkylen sterk nok til å fange inn *alle* interessante uttrykk.

Syntaks

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

- Utsagnsvariable representerer atomære utsagn, f.eks.:

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

- Utsagnsvariable representerer atomære utsagn, f.eks.:
  - *"IFI2 bygges"*

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

- Utsagnsvariable representerer atomære utsagn, f.eks.:
  - *"IFI2 bygges"*
  - *"Forskningsparken er yngre enn IFI1"*

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

- Utsagnsvariable representerer atomære utsagn, f.eks.:
  - *"IFI2 bygges"*
  - *"Forskningsparken er yngre enn IFI1"*
  - *"logikk er gøy"*

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

- Utsagnsvariable representerer atomære utsagn, f.eks.:
  - *"IFI2 bygges"*
  - *"Forskningsparken er yngre enn IFI1"*
  - *"logikk er gøy"*

Notasjon

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

- Utsagnsvariable representerer atomære utsagn, f.eks.:
  - *"IFI2 bygges"*
  - *"Forskningsparken er yngre enn IFI1"*
  - *"logikk er gøy"*

Notasjon

Vi skriver ofte utsagnsvariable som $P, Q, R, \ldots$

Syntaks

Syntaks

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er broen stengt,"

Syntaks

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er broen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

Syntaks

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er broen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

Definisjon (Utsagnslogisk alfabet)

Syntaks

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er broen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

Definisjon (Utsagnslogisk alfabet)

Det utsagnslogiske alfabet består av:

Syntaks

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er broen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

Definisjon (Utsagnslogisk alfabet)

Det utsagnslogiske alfabet består av:

- Utsagnsvariablene i $\mathcal{V}_u$.

Syntaks

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er broen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

Definisjon (Utsagnslogisk alfabet)

Det utsagnslogiske alfabet består av:

- Utsagnsvariablene i $\mathcal{V}_u$.
- De logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$.

Syntaks

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er broen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

Definisjon (Utsagnslogisk alfabet)

Det utsagnslogiske alfabet består av:

- Utsagnsvariablene i $\mathcal{V}_u$.
- De logiske konnektivene $\land$, $\lor$, $\rightarrow$ og $\neg$.
- Hjelpesymbolene '(' og ')'.

Syntaks

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er broen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

Definisjon (Utsagnslogisk alfabet)

Det utsagnslogiske alfabet består av:

- Utsagnsvariablene i $\mathcal{V}_u$.
- De logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$.
- Hjelpesymbolene '(' og ')'.

Intuisjon:

$\neg$ skal bety *"ikke"* $\wedge$ skal bety *"og"*

$\vee$ skal bety *"eller"* $\rightarrow$ skal bety *"impliserer"*

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av utsagnslogiske formler er den minste mengden $\mathcal{F}_\mathfrak{u}$ slik at:

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av utsagnslogiske formler er den minste mengden $\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}}$ slik at:

1. $\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}}$ inneholder alle atomære formler.

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av utsagnslogiske formler er den minste mengden $\mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$ slik at:

1. $\mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$ inneholder alle atomære formler.
2. Hvis $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$, så er $\neg A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$.

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av utsagnslogiske formler er den minste mengden $\mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$ slik at:

1. $\mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$ inneholder alle atomære formler.
2. Hvis $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$, så er $\neg A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$.
3. Hvis $A, B \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$, så er $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$ med i $\mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$.

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \rightarrow Q)$

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \to Q)$
- $((P \lor Q) \land \neg(P \lor R))$

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \rightarrow Q)$
- $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$

Notasjon

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \to Q)$
- $((P \lor Q) \land \neg(P \lor R))$

Notasjon

Vi dropper ofte unødvendige parenteser:

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \to Q)$
- $((P \lor Q) \land \neg(P \lor R))$

Notasjon

Vi dropper ofte unødvendige parenteser:

$(P \to Q)$ skrives $P \to Q$

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \rightarrow Q)$
- $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$

Notasjon

Vi dropper ofte unødvendige parenteser:

$$
\begin{array}{lll}
(P \rightarrow Q) & \text{skrives} & P \rightarrow Q \\
((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R)) & \text{skrives} & (P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R)
\end{array}
$$

Eksempel

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \wedge P)$

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \land P)$

Oppgave

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $\mathrm{P} \rightarrow$
- $((\mathrm{Q} \land \mathrm{P})$

Oppgave

Vis at $((\mathrm{Q} \land \mathrm{P})$ *ikke* er en utsagnslogisk formel.

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \land P)$

Oppgave

Vis at $((Q \land P)$ *ikke* er en utsagnslogisk formel.

- Intuitivt

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \land P)$

Oppgave

Vis at $((Q \land P)$ *ikke* er en utsagnslogisk formel.

- Intuitivt, men hvordan bevise det?

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \land P)$

Oppgave

Vis at $((Q \land P)$ *ikke* er en utsagnslogisk formel.

- Intuitivt, men hvordan bevise det?
- Ved såkalt strukturell induksjon kan vi vise noe sterkere:

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \wedge P)$

Oppgave

Vis at $((Q \wedge P)$ *ikke* er en utsagnslogisk formel.

- Intuitivt, men hvordan bevise det?
- Ved såkalt strukturell induksjon kan vi vise noe sterkere:

Påstand

Alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.

Strukturell induksjon

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}}$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}}$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man da vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}}$.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}}$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man da vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}}$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathfrak{F}_\mathfrak{U}$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man da vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathfrak{F}_\mathfrak{U}$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathfrak{F}_\mathfrak{U}$ har egenskapen **P** hvis:

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathfrak{F}_\mathfrak{U}$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man da vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathfrak{F}_\mathfrak{U}$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathfrak{F}_\mathfrak{U}$ har egenskapen **P** hvis:
Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **P**.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_{\mathfrak{u}}$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man da vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_{\mathfrak{u}}$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_{\mathfrak{u}}$ har egenskapen **P** hvis:

Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **P**.

Induksjonssteg:

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man da vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathfrak{F}_{\mathfrak{u}}$ har egenskapen **P** hvis:
Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **P**.
Induksjonssteg:

- Hvis A har egenskapen **P**, så har også $\neg A$ egenskapen **P**.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man da vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$ har egenskapen **P** hvis:
Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **P**.
Induksjonssteg:

- Hvis A har egenskapen **P**, så har også $\neg A$ egenskapen **P**.
- Hvis A og B har egenskapen **P**, så har også $(A \land B)$, $(A \lor B)$ og $(A \to B)$ egenskapen **P**.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_\mathfrak{u}$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man da vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_\mathfrak{u}$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_\mathfrak{u}$ har egenskapen **P** hvis:
Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **P**.
Induksjonssteg:

- Hvis A har egenskapen **P**, så har også $\neg A$ egenskapen **P**.
- Hvis A og B har egenskapen **P**, så har også $(A \land B)$, $(A \lor B)$ og $(A \to B)$ egenskapen **P**.

- Strukturell induksjon er en bevisteknikk vi kommer til å bruke mye!

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_{\mathfrak{u}}$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man da vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_{\mathfrak{u}}$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_{\mathfrak{u}}$ har egenskapen **P** hvis:
Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **P**.
Induksjonssteg:

- Hvis A har egenskapen **P**, så har også $\neg A$ egenskapen **P**.
- Hvis A og B har egenskapen **P**, så har også $(A \land B)$, $(A \lor B)$ og $(A \rightarrow B)$ egenskapen **P**.

- Strukturell induksjon er en bevisteknikk vi kommer til å bruke mye!
- Derfor er det viktig å kunne den godt...

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_\mathcal{U}$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_\mathfrak{U}$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_\mathfrak{U}$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.
Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_\mathfrak{u}$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\land, \lor, \to\}$

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, og at påstanden holder for B og C.

□

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, og at påstanden holder for B og C. A har én venstre- og én høyreparentes i tillegg til de som finnes i B og C.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathfrak{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.
Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, og at påstanden holder for B og C. A har én venstre- og én høyreparentes i tillegg til de som finnes i B og C. Siden påstanden holder for B og C, holder den også for A.

$\square$

Tilbake til uttrykket $((Q \land P)$:

Påstand

$((Q \land P)$ er *ikke* en utsagnslogisk formel.

Tilbake til uttrykket $((Q \land P)$:

Påstand

$((Q \land P)$ er *ikke* en utsagnslogisk formel.

Bevis.

$\square$

Tilbake til uttrykket $((Q \land P)$:

Påstand

$((Q \land P)$ er *ikke* en utsagnslogisk formel.

Bevis.

1. Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.

$\square$

Tilbake til uttrykket $((Q \land P)$:

Påstand

$((Q \land P)$ er *ikke* en utsagnslogisk formel.

Bevis.

1. Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.
2. Det kontrapositive er at hvis et uttrykk *ikke* har like mange venstre- og høyreparenteser, så er det *ikke* en utsagnslogisk formel.

$\square$

Tilbake til uttrykket $((Q \land P)$:

Påstand

$((Q \land P)$ er *ikke* en utsagnslogisk formel.

Bevis.

1. Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.
2. Det kontrapositive er at hvis et uttrykk *ikke* har like mange venstre- og høyreparenteser, så er det *ikke* en utsagnslogisk formel.
3. Uttrykket '$((Q \land P)$' har to venstre- og én høyreparentes, altså ulikt antall.

$\square$

Tilbake til uttrykket $((Q \land P)$:

Påstand

$((Q \land P)$ er *ikke* en utsagnslogisk formel.

Bevis.

1. Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.
2. Det kontrapositive er at hvis et uttrykk *ikke* har like mange venstre- og høyreparenteser, så er det *ikke* en utsagnslogisk formel.
3. Uttrykket '$((Q \land P)$' har to venstre- og én høyreparentes, altså ulikt antall.
4. Derfor er det ikke en utsagnslogisk formel.

□