INF3170 – Logikk

Forelesning 3: Utsagnslogikk, semantikk, sekventkalkyle

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

9. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-09 15:11)

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk

Semantikk

Sekventkalkyle

Semantikk

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som enten sanne eller usanne.

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som enten sanne eller usanne.

Definisjon

La $\mathbf{Bool} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ og $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ og $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- Vi definerer de binære operatorene $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ og $\hat{\rightarrow}$ på **Bool** som følger:

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\land}$, $\hat{\lor}$ og $\hat{\to}$)

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ og $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- Vi definerer de binære operatorene $\hat{\lor}$, $\hat{\land}$ og $\hat{\to}$ på **Bool** som følger:

x	y			
0	**0**			
0	**1**			
1	**0**			
1	**1**			

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\to}$)

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ og $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- Vi definerer de binære operatorene $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ og $\hat{\to}$ på **Bool** som følger:

x	y	$x \hat{\wedge} y$		
0	**0**	**0**		
0	**1**	**0**		
1	**0**	**0**		
1	**1**	**1**		

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ og $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- Vi definerer de binære operatorene $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ og $\hat{\rightarrow}$ på **Bool** som følger:

x	y	$x\hat{\wedge}y$	$x\hat{\vee}y$	
0	**0**	**0**	**0**	
0	**1**	**0**	**1**	
1	**0**	**0**	**1**	
1	**1**	**1**	**1**	

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ og $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- Vi definerer de binære operatorene $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ og $\hat{\rightarrow}$ på **Bool** som følger:

x	y	$x \hat{\wedge} y$	$x \hat{\vee} y$	$x \hat{\rightarrow} y$
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\land}$, $\hat{\lor}$ og $\hat{\to}$)

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ og $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- Vi definerer de binære operatorene $\hat{\lor}$, $\hat{\land}$ og $\hat{\to}$ på **Bool** som følger:

x	y	$x \hat{\land} y$	$x \hat{\lor} y$	$x \hat{\to} y$
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Tabellen over kalles en sannhetsverditabell.

Definisjon (Boolsk valuasjon)

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ til **Bool** slik at:

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_\mathcal{U}$ til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_\mathcal{U}$ til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \land B) = v(A) \hat{\land} v(B)$
- $v(A \lor B) = v(A) \hat{\lor} v(B)$

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \land B) = v(A) \hat{\land} v(B)$
- $v(A \lor B) = v(A) \hat{\lor} v(B)$
- $v(A \to B) = v(A) \hat{\to} v(B)$

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$
- $v(A \rightarrow B) = v(A) \hat{\rightarrow} v(B)$

Merk

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_u$ til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$
- $v(A \to B) = v(A) \hat{\to} v(B)$

Merk

- Symbolene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\to$ på venstresiden er de utsagnslogiske konnektivene, som er en del av *syntaksen*.

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$
- $v(A \to B) = v(A) \hat{\to} v(B)$

Merk

- Symbolene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\to$ på venstresiden er de utsagnslogiske konnektivene, som er en del av *syntaksen*.
- Symbolene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\to}$ på høyresiden er operatorer på **Bool**, og en del av *semantikken*.

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \rightarrow Q$.

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \to Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \to Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Vi får:

$$v(\neg P \to Q)$$

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \to Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Vi får:

$$v(\neg P \to Q) \quad = \quad v(\neg P) \mathrel{\hat{\to}} v(Q)$$

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \rightarrow Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Vi får:

$$\begin{aligned} v(\neg P \rightarrow Q) &= v(\neg P) \hat{\rightarrow} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, v(P)) \hat{\rightarrow} v(Q) \end{aligned}$$

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \rightarrow Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Vi får:

$$\begin{aligned} v(\neg P \rightarrow Q) &= v(\neg P) \mathbin{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, v(P)) \mathbin{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathbin{\hat{\rightarrow}} v(Q) \end{aligned}$$

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \to Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Vi får:

$$\begin{aligned} v(\neg P \to Q) &= v(\neg P) \mathrel{\hat{\to}} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, v(P)) \mathrel{\hat{\to}} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\to}} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\to}} \mathbf{0} \end{aligned}$$

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \to Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Vi får:

$$\begin{aligned} v(\neg P \to Q) &= v(\neg P) \mathrel{\hat{\to}} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, v(P)) \mathrel{\hat{\to}} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\to}} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\to}} \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \mathrel{\hat{\to}} \mathbf{0} \end{aligned}$$

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \rightarrow Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Vi får:

$$\begin{array}{rcl} v(\neg P \rightarrow Q) & = & v(\neg P) \mathrel{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\ & = & (\hat{\neg}\, v(P)) \mathrel{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\ & = & (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\ & = & (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\rightarrow}} \mathbf{0} \\ & = & \mathbf{0} \mathrel{\hat{\rightarrow}} \mathbf{0} \\ & = & \mathbf{1} \end{array}$$

Definisjon (Oppfyllbar)

Definisjon (Oppfyllbar)

- En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.

Definisjon (Oppfyllbar)

- En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er oppfyllbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.

Definisjon (Oppfyllbar)

- En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er oppfyllbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

Definisjon (Oppfyllbar)

- En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er oppfyllbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Formelen $P \rightarrow Q$ er oppfyllbar: den oppfylles av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.

Definisjon (Oppfyllbar)

- En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er oppfyllbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Formelen $P \to Q$ er oppfyllbar: den oppfylles av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.
- Formelen $\neg(P \to P)$ er *ikke* oppfyllbar. Hvorfor?

Definisjon (Falsifiserbar)

Definisjon (Falsifiserbar)

- En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.

Definisjon (Falsifiserbar)

- En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er falsifiserbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.

Definisjon (Falsifiserbar)

- En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er falsifiserbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.

Eksempel

Definisjon (Falsifiserbar)

- En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er falsifiserbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.

Eksempel

- Formelen $P \rightarrow Q$ er falsifiserbar: den falsifiseres av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.

Definisjon (Falsifiserbar)

- En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er falsifiserbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.

Eksempel

- Formelen $P \rightarrow Q$ er falsifiserbar: den falsifiseres av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Formelen $P \rightarrow P$ er *ikke* falsifiserbar. Hvorfor?

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Eksempel

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Eksempel

- Er P en tautologi?

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Eksempel

- Er P en tautologi?
- Hva med $\neg(\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{P})$?

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Eksempel

- Er P en tautologi?
- Hva med $\neg(P \rightarrow P)$?
- Og $P \rightarrow P$?

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en motsigelse (eller en kontradiksjon) hvis $v \not\models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en motsigelse (eller en kontradiksjon) hvis $v \not\models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Merk

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en motsigelse (eller en kontradiksjon) hvis $v \not\models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Merk

- Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en motsigelse (eller en kontradiksjon) hvis $v \not\models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Merk

- Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.
- Det motsatte av en motsigelse er den oppfyllbar formel.

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en motsigelse (eller en kontradiksjon) hvis $v \not\models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Merk

- Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.
- Det motsatte av en motsigelse er den oppfyllbar formel.
- En tautologi er ikke det motsatte av en motsigelse!

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.

$\square$

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.

formelen A er en tautologi

$\square$

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.

$$\text{formelen } A \text{ er en tautologi}$$
$$\Leftrightarrow$$

$\square$

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.

$$\text{formelen } A \text{ er en tautologi} \\ \Leftrightarrow \\ v \models A \text{ for alle valuasjoner } v$$

$\square$

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.

$$\text{formelen } A \text{ er en tautologi}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$v \models A \text{ for alle valuasjoner } v$$
$$\Leftrightarrow$$

$\square$

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.

$$\text{formelen } A \text{ er en tautologi}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$v \models A \text{ for alle valuasjoner } v$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{det finnes ingen valuasjon } v \text{ slik at } v \not\models A$$

$\square$

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.

$$\text{formelen } A \text{ er en tautologi}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$v \models A \text{ for alle valuasjoner } v$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{det finnes ingen valuasjon } v \text{ slik at } v \not\models A$$
$$\Leftrightarrow$$

$\square$

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.

$$\begin{gathered}\text{formelen } A \text{ er en tautologi}\\ \Leftrightarrow\\ v \models A \text{ for alle valuasjoner } v\\ \Leftrightarrow\\ \text{det finnes ingen valuasjon } v \text{ slik at } v \not\models A\\ \Leftrightarrow\\ A \text{ er ikke falsifiserbar}\end{gathered}$$

$\square$

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk

- Begrepet *“hvis og bare hvis”* uttrykker toveis implikasjon.

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk

- Begrepet *“hvis og bare hvis”* uttrykker toveis implikasjon.
- Skrives ofte $\Leftrightarrow$.

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk

- Begrepet *"hvis og bare hvis"* uttrykker toveis implikasjon.
- Skrives ofte $\Leftrightarrow$.
- P *"hvis og bare hvis"* Q kan uttrykkes i utsagnslogikk som

$$(P \to Q) \land (Q \to P)$$

Sekventkalkyle

Utsagnslogikk

Sekventkalkyle

- Motivasjon
- Sekventer og aksiomer
- Sekventkalkylereglene
- Slutninger
- Utledninger
- Bevis
- Semantikk for sekventer
- Oppsummering

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?
- Fra semantikken: Hvis formelen ikke er falsifiserbar, så er den en tautologi.

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?
- Fra semantikken: Hvis formelen ikke er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$\vdash \ (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:

$$\frac{P \to Q \;\vdash}{\vdash\; (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:
  - oppfylle $P \to Q$,

$$\frac{P \to Q \;\vdash\; \neg Q \to \neg P}{\vdash\; (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:
  - oppfylle $P \to Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \to \neg P$.

$$\frac{P \to Q \ \vdash \ \neg Q \to \neg P}{\vdash \ (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:
  - oppfylle $P \to Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \to \neg P$.
- Formler til *venstre* for $\vdash$ skal *oppfylles*.

$$\frac{P \to Q \;\vdash\; \neg Q \to \neg P}{\vdash\; (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:
  - oppfylle $P \to Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \to \neg P$.
- Formler til *venstre* for $\vdash$ skal *oppfylles*.
- Formler til *høyre* for $\vdash$ skal *falsifiseres*.

$$\frac{P \to Q \ \vdash\ \neg Q \to \neg P}{\vdash\ (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:

$$\cfrac{\cfrac{\vdash P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P \qquad\qquad Q \vdash}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.

$$\dfrac{\dfrac{\vdash\ P \qquad\qquad Q\ \vdash}{P \rightarrow Q\ \vdash\ \neg Q \rightarrow \neg P}}{\vdash\ (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \rightarrow Q$:
    - falsifisere P,
    - *eller* oppfylle Q.
- $\neg Q \rightarrow \neg P$ må kunne falsifiseres uavhengig av hvordan $P \rightarrow Q$ oppfylles.

$$\cfrac{\cfrac{\vdash\ P, \neg Q \rightarrow \neg P \qquad\qquad Q\ \vdash\ \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q\ \vdash\ \neg Q \rightarrow \neg P}}{\vdash\ (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \rightarrow Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.
- $\neg Q \rightarrow \neg P$ må kunne falsifiseres uavhengig av hvordan $P \rightarrow Q$ oppfylles.
- Formelen kopieres derfor inn i begge de nye løvnodene.

$$\dfrac{\dfrac{\vdash\ P, \neg Q \rightarrow \neg P \qquad\qquad Q\ \vdash\ \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q\ \vdash\ \neg Q \rightarrow \neg P}}{\vdash\ (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$ i venstre løvnode:

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\color{red}{\neg Q} \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i høyre løvnode:

$$\dfrac{\dfrac{\neg Q \ \vdash \ \neg P, P}{\vdash \ P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \ \vdash \ \neg P}{Q \ \vdash \ \neg Q \to \neg P}}{\dfrac{P \to Q \ \vdash \ \neg Q \to \neg P}{\vdash \ (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i høyre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,

$$
\cfrac{\cfrac{\neg Q \ \vdash \ \neg P, P}{\vdash \ P, \neg Q \rightarrow \neg P} \qquad \cfrac{Q, \neg Q \ \vdash \ \neg P}{Q \ \vdash \ \neg Q \rightarrow \neg P}}{\cfrac{P \rightarrow Q \ \vdash \ \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash \ (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$ i høyre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.

$$\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\dfrac{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, {\color{red}P} \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, \color{red}{\neg Q} \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\dfrac{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
    - oppfylle P.
- Oppfylle $\neg Q$ i høyre løvnode:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash \color{red}{Q}, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.
- Oppfylle $\neg Q$ i høyre løvnode:
  - falsifisere Q.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}
  }{\vdash P, \neg Q \to \neg P}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}
  }{Q \vdash \neg Q \to \neg P}
}{
  \dfrac{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, {\color{red}P} \vdash {\color{red}P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\dfrac{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \cfrac{\cfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{\dfrac{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P.   Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q.   Falsifisere: Q, $\neg P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{{\color{red}Q} \vdash {\color{red}Q}, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!
- $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Kommentarer til det foregående eksempelet:

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en utledning.

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en utledning.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av $\vdash$. En utledning med denne egenskapen kalles et bevis.

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en utledning.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av $\vdash$. En utledning med denne egenskapen kalles et bevis.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventkalkylen LK

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles succedent.

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles succedent.

Notasjon

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles succedent.

Notasjon

I sekventer leses ‘,’ som union:

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles succedent.

Notasjon

I sekventer leses ',' som union:

- Γ, A skal bety $\Gamma \cup \{A\}$.

Eksempel

Eksempel

Eksempel

- $P \vdash Q$

Eksempel

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$

Eksempel

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$

Eksempel

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$

Eksempel

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \to Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \to R \vdash Q \to R$

Eksempel

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$

Eksempel

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$
- $P, 1, P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow 2$

Eksempel

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \to Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \to R \vdash Q \to R$
- $P, Q \to R \vdash Q \to R, P$
- $P, 1, P \to Q \vdash P \to 2$

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel.

Eksempel

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$
- $P, 1, P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow 2$

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel.

Hvilke av sekventene i eksempelet over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \ \vdash\ \Delta}{\Gamma, A \land B \ \vdash\ \Delta}\ \mathsf{L}\land$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B\ \vdash\ \Delta}{\Gamma, A \land B\ \vdash\ \Delta}\,\mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma\ \vdash\ A \lor B, \Delta}\,\mathsf{R}\lor$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \ \vdash\ \Delta}{\Gamma, A \wedge B \ \vdash\ \Delta}\ \mathsf{L}\wedge \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma\ \vdash\ A \vee B, \Delta}\ \mathsf{R}\vee$$

$$\frac{\Gamma, A\ \vdash\ B, \Delta}{\Gamma\ \vdash\ A \rightarrow B, \Delta}\ \mathsf{R}\rightarrow$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \ \vdash\ \Delta}{\Gamma, A \land B \ \vdash\ \Delta}\ \mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma\ \vdash\ A \lor B, \Delta}\ \mathsf{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A\ \vdash\ B, \Delta}{\Gamma\ \vdash\ A \to B, \Delta}\ \mathsf{R}{\to}$$

$$\frac{\Gamma\ \vdash\ A, \Delta}{\Gamma, \neg A\ \vdash\ \Delta}\ \mathsf{L}\neg$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\ \mathsf{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \mathsf{R}\!\to$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathsf{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\,\mathsf{R}{\to}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg$$

α-reglene kalles ofte ett-premissregler.

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\to$$

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\to$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\rightarrow$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\rightarrow$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Slutningsreglene i sekventkalkylen LK er α- og β-reglene.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \, \mathsf{L}\vee$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Regler versus slutninger

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en instans av en regel hvor

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en instans av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en instans av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en instans av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en instans av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en instans av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\frac{P \ \vdash}{\vdash \ \neg P}$$

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en instans av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\frac{P \;\vdash}{\vdash\; \neg P} \qquad \frac{Q, P \;\vdash}{Q \;\vdash\; \neg P}$$

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en instans av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\frac{P \vdash}{\vdash \neg P} \qquad \frac{Q, P \vdash}{Q \vdash \neg P} \qquad \frac{Q \to R, P \vdash P}{Q \to R \vdash \neg P, P}$$

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en instans av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$ R$\neg$ definerer uendelig mange R$\neg$-slutninger:

$$\frac{P \;\vdash\;}{\;\vdash\; \neg P} \qquad \frac{Q, P \;\vdash\;}{Q \;\vdash\; \neg P} \qquad \frac{Q \to R, P \;\vdash\; P}{Q \to R \;\vdash\; \neg P, P} \qquad \ldots$$

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\,\mathsf{L}\lor$$

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}\,\mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\dfrac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.
- Formlene P og R i premissene er aktive formler.

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.
- Formlene P og R i premissene er aktive formler.
- De andre formlene er ekstraformler.

Utledninger

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-utledning.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

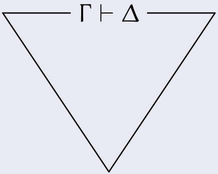
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

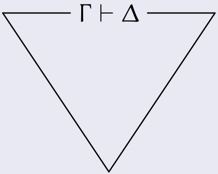
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$



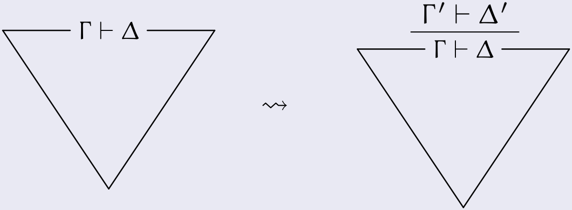
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$



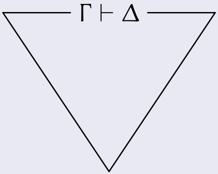
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



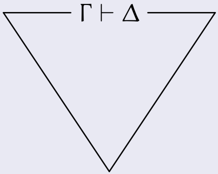
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$



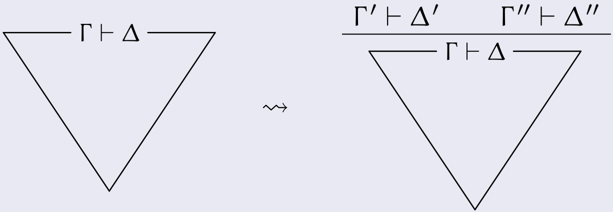
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$



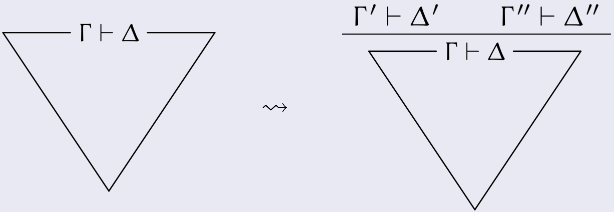
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



β-utvidelse gir forgrening i utledningen!

Eksempel (LK-utledninger)

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \vee Q$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \vee Q$ $\qquad$ $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

$\vdash \ P \rightarrow Q$

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \lor Q$ $\qquad$ $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

$\vdash \; P \to Q$

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \vee Q$ $\qquad\qquad$ $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

$$\dfrac{P \;\vdash\; Q}{\vdash\; \color{red}{P \to Q}}\,\mathsf{R}\!\to$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \vee Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \;\vdash\; Q}{\vdash\; P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad\qquad \vdash\; P \wedge P$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \ \vdash \ Q}{\vdash \ P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad\qquad \vdash \ P \land P$$

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \vee Q$

$P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

$$\dfrac{P \;\vdash\; Q}{\vdash\; P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash\; P \qquad\qquad \vdash\; P}{\vdash\; {\color{red}P \wedge P}}\,\mathsf{R}{\wedge}$$

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \lor Q$ $\qquad\qquad$ $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

$$\dfrac{P \ \vdash \ Q}{\vdash \ P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash \ P \qquad\qquad \vdash \ P}{\vdash \ P \land P}\,\mathsf{R}{\land}$$

$$P \lor Q \ \vdash \ P \land Q$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \vee Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\frac{P \;\vdash\; Q}{\vdash\; P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \frac{\vdash\; P \qquad\qquad \vdash\; P}{\vdash\; P \wedge P}\,\mathsf{R}\wedge$$

$$\color{red}{P \vee Q} \;\vdash\; P \wedge Q$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,\mathsf{R}\land$$

$$\dfrac{P \vdash P \land Q \qquad\qquad Q \vdash P \land Q}{{\color{red}P \lor Q} \vdash P \land Q}\,\mathsf{L}\lor$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,\mathsf{R}{\land}$$

$$\dfrac{P \vdash \color{red}{P \land Q} \qquad\qquad Q \vdash P \land Q}{P \lor Q \vdash P \land Q}\,\mathsf{L}{\lor}$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\frac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,R{\to} \qquad \frac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,R{\land}$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash \color{red}{P \land Q}}\,R{\land} \qquad Q \vdash P \land Q}{P \lor Q \vdash P \land Q}\,L{\lor}$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \ \vdash\ Q}{\vdash\ P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash\ P \qquad \vdash\ P}{\vdash\ P \land P}\,\mathsf{R}\land$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash P \land Q}\,\mathsf{R}\land \qquad Q \vdash \color{red}{P \land Q}}{P \lor Q \ \vdash\ P \land Q}\,\mathsf{L}\lor$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,R{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,R{\land}$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash P \land Q}\,R{\land} \qquad \dfrac{Q \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q \vdash {\color{red}P \land Q}}\,R{\land}}{P \lor Q \vdash P \land Q}\,L{\lor}$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,R{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,R{\land}$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash P \land Q}\,R{\land} \qquad \dfrac{Q \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q \vdash P \land Q}\,R{\land}}{P \lor Q \vdash P \land Q}\,L{\lor}$$

LK-bevis

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis)

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Eksempel (LK-bevis)

Eksempel (LK-bevis)

$$\vdash \; P \rightarrow P$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\vdash \; P \rightarrow P$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{P \;\vdash\; P}{\vdash\; P \rightarrow P}\;\mathsf{R}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{P \vdash P}{\vdash P \rightarrow P}\, \mathsf{R}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\,R\!\rightarrow$$

$$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ R\rightarrow$$

$$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}\!\rightarrow$$

$$\dfrac{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P \qquad\qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{\color{red}{P \rightarrow Q} \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{L}\!\rightarrow$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P \qquad\qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \color{red}{\neg Q \rightarrow \neg P}}\ \mathsf{R}{\rightarrow} \qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \color{red}{\neg P}, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\,\mathsf{R}\!\rightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \color{red}{\neg P}, P}\,\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}\,\mathsf{R}\!\rightarrow \qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\,\mathsf{L}\!\rightarrow$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}\!\rightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, {\color{red}P} \vdash {\color{red}P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{R}\!\rightarrow \qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{L}\!\rightarrow$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ R\rightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ R\neg}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}\ R\rightarrow \qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ L\rightarrow$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ P \vdash P\end{array}}{\vdash P \to P}\;\mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \neg Q, P \vdash P\end{array}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\;\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\;\mathsf{R}{\to} \qquad Q \vdash {\color{red}\neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\;\mathsf{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ P \;\vdash\; P\end{array}}{\vdash\; P \rightarrow P}\;\mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \neg Q, P \;\vdash\; P\end{array}}{\neg Q \;\vdash\; \neg P, P}\;\mathsf{R}\neg}{\vdash\; P, \neg Q \rightarrow \neg P}\;\mathsf{R}{\rightarrow} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \;\vdash\; \neg P}{Q \;\vdash\; {\color{red}\neg Q \rightarrow \neg P}}\;\mathsf{R}{\rightarrow}}{P \rightarrow Q \;\vdash\; \neg Q \rightarrow \neg P}\;\mathsf{L}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\begin{array}{c}\times\\ \dfrac{P \vdash P}{\vdash P \to P}\ \mathsf{R}{\to}\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \neg Q, P \vdash P\end{array}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$
\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathsf{R}{\to}
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to}
\qquad
\dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \color{red}{\neg Q} \vdash \neg P}\ \mathsf{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to}
}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{L}{\to}
$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ P \vdash P\end{array}}{\vdash P \to P}\;\mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \neg Q, P \vdash P\end{array}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\;\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\;\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\;\mathsf{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\;\mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\;\mathsf{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\ \mathsf{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ R\!\to$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ R\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ R\!\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\ L\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ R\!\to}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ L\!\to$$

- Sekventene $\vdash P \to P$ og $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ er bevisbare, siden det finnes LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\ \mathsf{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{L}{\to}$$

- Sekventene $\vdash P \to P$ og $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ er bevisbare, siden det finnes LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Merk: symbolet $\times$ er ikke en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.

Semantikk for sekventer

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \to Q \vdash P \to Q$
- $P, P \to Q \vdash Q$
- $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ — Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$ — Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ — Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ — Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$ Motmodell: alle modeller!

Oppsummering

Oppsummering

Gyldig

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \;\vdash\; P} \qquad \dfrac{\times}{Q \;\vdash\; Q}}{P, P \rightarrow Q \;\vdash\; Q}$$

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P} \qquad \dfrac{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P} \qquad \dfrac{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P} \qquad \overset{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \to Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P} \qquad \overset{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P, \neg Q, P}{\neg P \vdash \neg Q, P} \qquad \dfrac{Q, \neg P, Q \vdash}{Q, \neg P \vdash \neg Q}}{\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q}$$