INF3170 – Forelesning 3

Utsagnslogikk, semantikk, sekventkalkyle

Roger Antonsen - 9. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-09 15:10)

Dagens plan

Innhold

Utsagnslogikk

Semantikk

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som enten *sanne* eller *usanne*.

Definisjon.
La **Bool** $= \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\to}$).

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ og $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- Vi definerer de binære operatorene $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ og $\hat{\to}$ på **Bool** som følger:

x	y	$x \hat{\wedge} y$	$x \hat{\vee} y$	$x \hat{\to} y$
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Tabellen over kalles en *sannhetsverditabell*.

Definisjon (Boolsk valuasjon).
En *boolsk valuasjon* er en funksjon v fra $\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}}$ til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$
- $v(A \rightarrow B) = v(A) \hat{\rightarrow} v(B)$

Merk.

- Symbolene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$ på venstresiden er de utsagnslogiske konnektivene, som er en del av *syntaksen*.
- Symbolene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$ på høyresiden er operatorer på **Bool**, og en del av *semantikken*.

Eksempel.

- Se på formelen $\neg P \rightarrow Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Vi får:

$$
\begin{aligned}
v(\neg P \rightarrow Q) &= v(\neg P) \hat{\rightarrow} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, v(P)) \hat{\rightarrow} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \hat{\rightarrow} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \hat{\rightarrow} \mathbf{0} \\
&= \mathbf{0} \hat{\rightarrow} \mathbf{0} \\
&= \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Definisjon (Oppfyllbar).

- En boolsk valuasjon v *oppfyller* en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er *oppfyllbar* hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.

Eksempel.

- Formelen $P \to Q$ er oppfyllbar: den oppfylles av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.
- Formelen $\neg(P \to P)$ er *ikke* oppfyllbar. Hvorfor?

Definisjon (Falsifiserbar).

- En boolsk valuasjon v *falsifiserer* en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er *falsifiserbar* hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.

Eksempel.

- Formelen $P \to Q$ er falsifiserbar: den falsifiseres av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Formelen $P \to P$ er *ikke* falsifiserbar. Hvorfor?

Definisjon (Tautologi).
En utsagnslogisk formel A er en *tautologi* hvis $v \models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Eksempel.

- Er P en tautologi?
- Hva med $\neg(P \to P)$?
- Og $P \to P$?

Definisjon (Motsigelse).
En utsagnslogisk formel A er en *motsigelse* (eller en *kontradiksjon*) hvis $v \not\models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Merk.

- Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.
- Det motsatte av en motsigelse er den oppfyllbar formel.
- En tautologi er *ikke* det motsatte av en motsigelse!

Påstand.
En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.
formelen A er en tautologi $\Leftrightarrow$ $v \models A$ for alle valuasjoner v $\Leftrightarrow$ det finnes ingen valuasjon v slik at $v \not\models A$ $\Leftrightarrow$ A er ikke falsifiserbar

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk.

- Begrepet *"hvis og bare hvis"* uttrykker toveis implikasjon.
- Skrives ofte $\Leftrightarrow$.
- P *"hvis og bare hvis"* Q kan uttrykkes i utsagnslogikk som

$$(P \to Q) \land (Q \to P)$$

Sekventkalkyle

Motivasjon

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en *tautologi*?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:
  - oppfylle $P \to Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \to \neg P$.
- *Formler til* venstre *for* $\vdash$ *skal* oppfylles.
- *Formler til* høyre *for* $\vdash$ *skal* falsifiseres.
- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.
- $\neg Q \to \neg P$ må kunne falsifiseres uavhengig av hvordan $P \to Q$ oppfylles.
- Formelen kopieres derfor inn i begge de nye løvnodene.
- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i høyre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.
- Oppfylle $\neg Q$ i høyre løvnode:
  - falsifisere Q.
- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!
- $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for *sekventer*.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av *regler*.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en *utledning*.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av $\vdash$. En utledning med denne egenskapen kalles et *bevis*.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventer og aksiomer

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent).
En *sekvent* er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles *antecedent*.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles *succedent*.

Notasjon.
I sekventer leses ‘,’ som union:

- Γ, A skal bety $\Gamma \cup \{A\}$.

Eksempel.

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \to Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \to R \vdash Q \to R$
- $P, Q \to R \vdash Q \to R, P$
- $P, 1, P \to Q \vdash P \to 2$

Definisjon (Aksiom).
Et *aksiom* er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel.

Hvilke av sekventene i eksempelet over er aksiomer?

Sekventkalkylereglene

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler).
α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A\,,\,B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A\,,\,B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathsf{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\,\mathsf{R}\to$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg$$

α-reglene kalles ofte *ett-premissregler*.

Definisjon (β-regler).
β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\,\mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\to$$

β-reglene kalles ofte *to-premissregler*.

Definisjon (Slutningsreglene i LK).
Slutningsreglene i sekventkalkylen LK er α- og β-reglene.

Begreper knyttet til regler
Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\lor$$

- Sekventene *over* streken kalles *premisser*.
- Sekventen *under* streken kalles *konklusjon*.
- Teksten til høyre for streken er regelens *navn*.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles *hovedformel*.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles *aktive formler*.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles *ekstraformler*.

Slutninger

Regler versus slutninger

Definisjon (LK**-slutning).**

- En *slutning* er en instans av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-*slutninger*.

Eksempel.
En regel $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\frac{P \ \vdash}{\ \vdash \ \neg P} \qquad \frac{Q, P \ \vdash}{Q \ \vdash \ \neg P} \qquad \frac{Q \to R, P \ \vdash \ P}{Q \to R \ \vdash \ \neg P, P} \qquad \ldots$$

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\,\mathsf{L}\lor$$

- Sekventene *over* streken kalles *premisser*.
- Sekventen *under* streken kalles *konklusjon*.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er *hovedformel*.
- Formlene P og R i premissene er *aktive formler*.
- De andre formlene er *ekstraformler*.

Utledninger

Utledninger

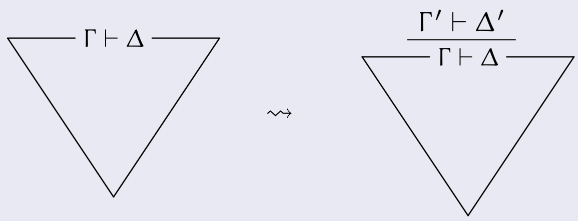
- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles *rotsekvent*.
- Løvnodene kalles *løvsekventer*.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle).
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en *LK-utledning*.

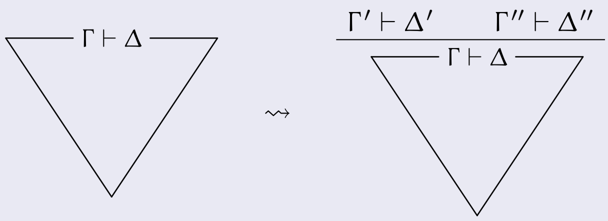
$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse).
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en *LK-utledning*.



Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse).
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en *LK-utledning*.



β-utvidelse gir forgrening i utledningen!

Eksempel (LK-utledninger).

$$\vdash R \vee Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,R\!\to \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \wedge P}\,R\wedge$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash P \land Q}\,R\land \qquad \dfrac{Q \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q \vdash P \land Q}\,R\land}{P \lor Q \vdash P \land Q}\,L\lor$$

Bevis

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis).
Et *LK-bevis* er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar).
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er *LK-bevisbar* hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Eksempel (LK-bevis).

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\,R\rightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\,R\neg}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}\,R\rightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\,L\neg}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\,R\rightarrow}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\,L\rightarrow$$

- Sekventene $\vdash P \rightarrow P$ og $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ er bevisbare, siden det finnes LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Merk: symbolet $\times$ er *ikke* en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent).
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er *gyldig* hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel.
Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \to Q \vdash P \to Q$
- $P, P \to Q \vdash Q$
- $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent).

- En valuasjon v er en *motmodell* til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent *falsifiserer* sekventen.
- En sekvent er *falsifiserbar* hvis den har en motmodell.

Eksempel.
Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$ Motmodell: *alle modeller!*

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P} \qquad \dfrac{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \to Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P, \neg Q, P}{\neg P \vdash \neg Q, P} \qquad \dfrac{Q, \neg P, Q \vdash}{Q, \neg P \vdash \neg Q}}{\neg P, P \to Q \vdash \neg Q}$$