

INF3170 – Logikk

Forelesning 3: Utsagnslogikk, semantikk, sekventkalkyle

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

9. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-09 15:10)



Utsagnslogikk

Utsagnslogikk
Semantikk

Sekventkalkyle

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som enten **sanne** eller **usanne**.

Definisjon

La **Bool** = $\{0, 1\}$.

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}1 = 0$ og $\hat{\neg}0 = 1$.
- Vi definerer de binære operatorene $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ og $\hat{\rightarrow}$ på **Bool** som følger:

x	y	$x\hat{\wedge}y$	$x\hat{\vee}y$	$x\hat{\rightarrow}y$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Tabellen over kalles en **sannhetsverditabell**.

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En **boolsk valuasjon** er en funksjon v fra \mathcal{F}_L til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg}v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A)\hat{\wedge}v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A)\hat{\vee}v(B)$
- $v(A \rightarrow B) = v(A)\hat{\rightarrow}v(B)$

Merk

- Symbolene \neg , \wedge , \vee og \rightarrow på venstresiden er de utsagnslogiske konnektivene, som er en del av *syntaksen*.
- Symbolene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$ på høyresiden er operatører på **Bool**, og en del av *semantikken*.

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \rightarrow Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = 1$ og $v(Q) = 0$.
- Vi får:

$$\begin{aligned}v(\neg P \rightarrow Q) &= v(\neg P) \hat{\rightarrow} v(Q) \\&= (\hat{\neg} v(P)) \hat{\rightarrow} v(Q) \\&= (\hat{\neg} 1) \hat{\rightarrow} v(Q) \\&= (\hat{\neg} 1) \hat{\rightarrow} 0 \\&= 0 \hat{\rightarrow} 0 \\&= 1\end{aligned}$$

Definisjon (Oppfyllbar)

- En boolsk valuasjon v **oppfyller** en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = 1$. Skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er **oppfyllbar** hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Formelen $P \rightarrow Q$ er oppfyllbar: den oppfylles av alle valuasjoner v slik at $v(P) = 0$ eller $v(Q) = 1$.
- Formelen $\neg(P \rightarrow P)$ er *ikke* oppfyllbar. Hvorfor?

Definisjon (Falsifiserbar)

- En boolsk valuasjon v **falsifiserer** en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er **falsifiserbar** hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.

Eksempel

- Formelen $P \rightarrow Q$ er falsifiserbar: den falsifiseres av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Formelen $P \rightarrow P$ er *ikke* falsifiserbar. Hvorfor?

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en **tautologi** hvis $v \models A$ for *alle* boolske valuasjoner v .

Eksempel

- Er P en tautologi?
- Hva med $\neg(P \rightarrow P)$?
- Og $P \rightarrow P$?

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en **motsigelse** (eller en **kontradiksjon**) hvis $v \not\models A$ for *alle* boolske valuasjoner v .

Merk

- Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.
- Det motsatte av en motsigelse er den oppfylbar formel.
- En tautologi er **ikke** det motsatte av en motsigelse!

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.

formelen A er en tautologi
 \Leftrightarrow
 $v \models A$ for alle valuasjoner v
 \Leftrightarrow
det finnes ingen valuasjon v slik at $v \not\models A$
 \Leftrightarrow
 A er ikke falsifiserbar



Hvis og bare hvis – \Leftrightarrow

Merk

- Begrepet “hvis og bare hvis” uttrykker toveis implikasjon.
- Skrives ofte \Leftrightarrow .
- P “hvis og bare hvis” Q kan uttrykkes i utsagnslogikk som

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Sekventkalkyle

Utsagnslogikk

Sekventkalkyle

Motivasjon
Sekventer og aksiomer
Sekventkalkylereglene
Slutninger
Utledninger
Bevis
Semantikk for sekventer
Oppsummering

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en **tautologi**?
- Fra semantikken: Hvis formelen **ikke** er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$\frac{\frac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P} \quad \frac{\frac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}$$

$$\frac{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
 - Oppfylle: $\neg Q, P$. Falsifisere: P .
 - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P !
- Høyre løvnode:
 - Oppfylle: Q . Falsifisere: $Q, \neg P$.
 - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q !
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen $\dots \vdash \dots$. Slike objekter kaller vi for **sekventer**.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av **regler**.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en **utledning**.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sider av \vdash . En utledning med denne egenskapen kalles et **bevis**.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En **sekvent** er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for \vdash kalles **antecedent**.
- Formlene som står til høyre for \vdash kalles **succedent**.

Notasjon

I sekventer leses ‘,’ som union:

- Γ, A skal bety $\Gamma \cup \{A\}$.

Eksempel

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$
- $P, 1, P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow 2$

Definisjon (Aksiom)

Et **aksiom** er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel.

Hvilke av sekventene i eksempelet over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α -regler)

α -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} L\wedge \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} R\vee$$
$$\frac{\Gamma, A \vdash \quad B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} R\rightarrow$$
$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} L\neg \quad \frac{\Gamma, A \vdash \quad \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R\neg$$

α -reglene kalles ofte **ett-premissregler**.

Definisjon (β -regler)

β -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} R\wedge$$
$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} L\vee$$
$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

β -reglene kalles ofte **to-premissregler**.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Slutningsreglene i sekventkalkylen LK er α - og β -reglene.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} LV$$

- Sekventene **over** streken kalles **premiss**.
- Sekventen **under** streken kalles **konklusjon**.
- Teksten til høyre for streken er regelens **navn**.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles **hovedformel**.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles **aktive form**ler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles **ekstraform**ler.

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En **slutning** er en instans av en regel hvor
 - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
 - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles **θ -slutninger**.

Eksempel

En regel $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R\neg$ definerer uendelig mange $R\neg$ -slutninger:

$$\frac{P \vdash \quad}{\vdash \neg P} \quad \frac{Q, P \vdash \quad}{Q \vdash \neg P} \quad \frac{Q \rightarrow R, P \vdash P}{Q \rightarrow R \vdash \neg P, P} \quad \dots$$

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \quad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q} \text{LV}$$

- Sekventene **over** streken kalles **premisser**.
- Sekventen **under** streken kalles **konklusjon**.
- Formelen $P \vee R$ i konklusjonen er **hovedformel**.
- Formlene P og R i premissene er **aktive formler**.
- De andre formlene er **ekstraformler**.

Utleddinger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles **rotsekvent**.
- Løvnodene kalles **løvsekventer**.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

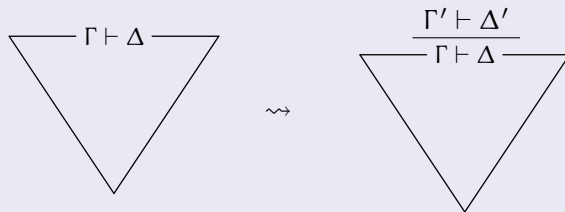
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en **LK-utledning**.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

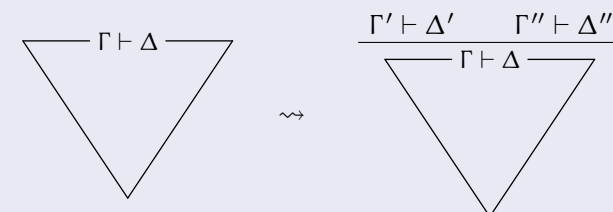
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α -utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α -slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en **LK-utledning**.



Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β -utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β -slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en **LK-utledning**.



β -utvidelse gir forgrening i utledningen!

Eksempel (LK-utledninger)

$$\begin{array}{c} \vdash R \vee Q \quad P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P \\ \\ \frac{P \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q} R \rightarrow \quad \frac{\vdash P \quad \vdash P}{\vdash P \wedge P} R \wedge \\ \\ \frac{\frac{P \vdash P \quad P \vdash Q}{P \vdash P \wedge Q} R \wedge \quad \frac{Q \vdash P \quad Q \vdash Q}{Q \vdash P \wedge Q} R \wedge}{P \vee Q \vdash P \wedge Q} LV \end{array}$$

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **LK-bevisbar** hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Eksempel (LK-bevis)

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{P \vdash P}{\vdash P \rightarrow P} R \rightarrow \\ \\ \frac{\frac{\times}{\frac{-Q, P \vdash P}{-Q \vdash \neg P, P} R \neg} \vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P} R \rightarrow \quad \frac{\frac{\times}{\frac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P} L \neg} Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} R \rightarrow}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} L \rightarrow \end{array}$$

- Sekventene $\vdash P \rightarrow P$ og $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ er bevisbare, siden det finnes LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Merk: symbolet \times er **ikke** en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **gyldig** hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formelene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ .

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en **motmodell** til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ .
- Vi sier at en motmodell til en sekvent **falsifiserer** sekventen.
- En sekvent er **falsifiserbar** hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = 1, v(Q) = 0$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = 0, v(Q) = 1$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = 0$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = 1$
- \vdash Motmodell: **alle modeller!**

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\frac{\begin{array}{c} \times \\ P \vdash P \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ Q \vdash Q \end{array}}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\frac{\frac{\vdash P, \neg Q, P}{\neg P \vdash \neg Q, P} \quad \frac{Q, \neg P, Q \vdash}{Q, \neg P \vdash \neg Q}}{\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q}$$