INF3170 – Logikk

Forelesning 3: Utsagnslogikk, semantikk, sekventkalkyle

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

9. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-09 15:10)

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk

Semantikk

Sekventkalkyle

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som enten sanne eller usanne.

Definisjon

La $\mathbf{Bool} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ og $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- Vi definerer de binære operatorene $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ og $\hat{\rightarrow}$ på **Bool** som følger:

x	y	$x \hat{\wedge} y$	$x \hat{\vee} y$	$x \hat{\rightarrow} y$
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Tabellen over kalles en sannhetsverditabell.

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_\mathcal{U}$ til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$
- $v(A \rightarrow B) = v(A) \hat{\rightarrow} v(B)$

Merk

- Symbolene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$ på venstresiden er de utsagnslogiske konnektivene, som er en del av *syntaksen*.
- Symbolene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$ på høyresiden er operatorer på **Bool**, og en del av *semantikken*.

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \rightarrow Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Vi får:

$$
\begin{aligned}
v(\neg P \rightarrow Q) &= v(\neg P) \mathrel{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, v(P)) \mathrel{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\rightarrow}} \mathbf{0} \\
&= \mathbf{0} \mathrel{\hat{\rightarrow}} \mathbf{0} \\
&= \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Definisjon (Oppfyllbar)

- En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er oppfyllbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Formelen $P \to Q$ er oppfyllbar: den oppfylles av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.
- Formelen $\neg(P \to P)$ er *ikke* oppfyllbar. Hvorfor?

Definisjon (Falsifiserbar)

- En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er falsifiserbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.

Eksempel

- Formelen $P \to Q$ er falsifiserbar: den falsifiseres av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Formelen $P \to P$ er *ikke* falsifiserbar. Hvorfor?

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Eksempel

- Er P en tautologi?
- Hva med $\neg(P \to P)$?
- Og $P \to P$?

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en motsigelse (eller en kontradiksjon) hvis $v \not\models A$ for *alle* boolske valuasjoner v.

Merk

- Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.
- Det motsatte av en motsigelse er den oppfyllbar formel.
- En tautologi er ikke det motsatte av en motsigelse!

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A *ikke* er falsifiserbar.

Bevis.

$$\begin{gathered}\text{formelen } A \text{ er en tautologi} \\ \Leftrightarrow \\ v \models A \text{ for alle valuasjoner } v \\ \Leftrightarrow \\ \text{det finnes ingen valuasjon } v \text{ slik at } v \not\models A \\ \Leftrightarrow \\ A \text{ er ikke falsifiserbar}\end{gathered}$$

$\square$

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk

- Begrepet *"hvis og bare hvis"* uttrykker toveis implikasjon.
- Skrives ofte $\Leftrightarrow$.
- P *"hvis og bare hvis"* Q kan uttrykkes i utsagnslogikk som

$$(P \to Q) \land (Q \to P)$$

Sekventkalkyle

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?
- Fra semantikken: Hvis formelen ikke er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!
- $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en utledning.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av $\vdash$. En utledning med denne egenskapen kalles et bevis.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles succedent.

Notasjon

I sekventer leses ‘,’ som union:

- Γ, A skal bety $\Gamma \cup \{A\}$.

Eksempel

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \to Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \to R \vdash Q \to R$
- $P, Q \to R \vdash Q \to R, P$
- $P, 1, P \to Q \vdash P \to 2$

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel.

Hvilke av sekventene i eksempelet over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\ \mathsf{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \mathsf{R}\to$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

α-reglene kalles ofte ett-premissregler.

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\rightarrow$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Slutningsreglene i sekventkalkylen LK er α- og β-reglene.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Regler versus slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en instans av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\frac{P \;\vdash}{\;\vdash\; \neg P} \qquad \frac{Q, P \;\vdash}{Q \;\vdash\; \neg P} \qquad \frac{Q \to R, P \;\vdash\; P}{Q \to R \;\vdash\; \neg P, P} \qquad \ldots$$

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.
- Formlene P og R i premissene er aktive formler.
- De andre formlene er ekstraformler.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

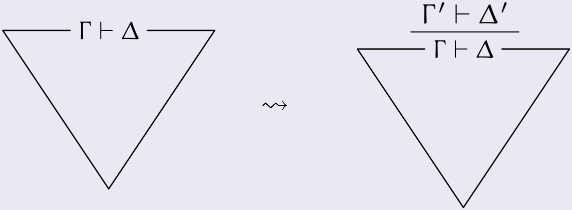
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

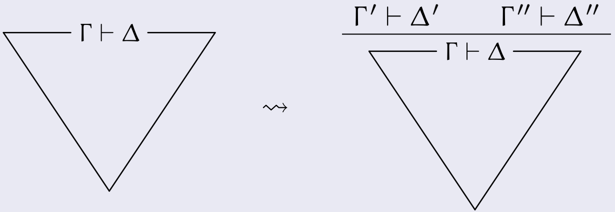
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



β-utvidelse gir forgrening i utledningen!

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \vee Q \qquad\qquad P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q}\,R{\rightarrow} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \wedge P}\,R{\wedge}$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash P \wedge Q}\,R{\wedge} \qquad \dfrac{Q \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q \vdash P \wedge Q}\,R{\wedge}}{P \vee Q \vdash P \wedge Q}\,L{\vee}$$

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\,\mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\,\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\,\mathsf{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{L}{\to}$$

- Sekventene $\vdash P \to P$ og $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ er bevisbare, siden det finnes LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Merk: symbolet $\times$ er ikke en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$ Motmodell: alle modeller!

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P} \qquad \dfrac{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \to Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P, \neg Q, P}{\neg P \vdash \neg Q, P} \qquad \dfrac{Q, \neg P, Q \vdash}{Q, \neg P \vdash \neg Q}}{\neg P, P \to Q \vdash \neg Q}$$