

INF3170 – Logikk

Forelesning 4: Sunnhet og kompletthet

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

16. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-09 17:43)



Sunnhet

Sunnhet

Introduksjon
Bevaring av falsifiserbarhet
Eksistens av falsifiserbar løvsekvent
Alle aksiomer er gyldige
Bevis for sunnhetsteoremet

Kompletthet

Egenskaper ved utsagnslogikk

Repetisjon

Innledning til førsteordens logikk

Førsteordens logikk - syntaks

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK **ukorrekt** eller **usunn** ...

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK er **sunn** hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem

Sekventkalkylen LK er sunn.

Sunnhetsteoremet sikrer oss at LK er en **korrekt** kalkyle.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Definisjon

En LK-regel θ er **falsifiserbarhetsbevarende** (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en θ -slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.

Lemma

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. $L\rightarrow$ -regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

- I delbeviset for $L\rightarrow$ må vi vise at alle $L\rightarrow$ -slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen $L\rightarrow$ generaliserer alle $L\rightarrow$ -slutninger.
- Vi lar Γ , Δ , A og B i regelen stå for vilkårlige (multimengder av) utsagnslogiske formler og viser på den måten at alle $L\rightarrow$ -slutninger bevarer falsifiserbarhet.

Bevis for $R\neg$.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ .
- Per definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$ og v falsifiserer alle formlene i Δ .
- Da falsifiserer v premisset.

□

Bevis for $L\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ .
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi per definisjon av v at
 - (1) $v \not\models A$, eller
 - (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.
- Hvis (2), så falsifiserer v høyre premiss.

□

Bevis for *for alle*-påstander

- Se på påstanden “for alle $x \in S$: $P(x)$ ”.
- Vi kan vise påstanden ved å vise at $P(a)$ for hvert element $a \in S$.
- Hva hvis S er svært stor eller uendelig?
- Vi kan **generalisere fra et vilkårlig element**:
 - Velg et **vilkårlig** element $a \in S$.
 - Vis at $P(a)$ holder.
 - Siden a var tilfeldig valgt må påstanden i første linje holde.

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning δ , så falsifiserer v minst én av løvsekventene i δ .

Bevis.

Ved strukturell induksjon på LK-utledningen δ .

Basissteg: δ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Da falsifiserer v én løvsekvent i δ , nemlig $\Gamma \vdash \Delta$.

□

Bevis (induksjonssteg – α -utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} \alpha$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ , og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen **før** α -utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **ikke** er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ . Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ .
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **er** $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ siden α -reglene bevarer falsifiserbarhet.

□

Bevis (induksjonssteg – β -utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \quad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}}{\beta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ , og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen **før** β -utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **ikke** er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ . Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ .
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **er** $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ eller $\Gamma'' \vdash \Delta''$ siden β -reglene bevarer falsifiserbarhet.

□

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller v formelen A i succedenten.

□

Bevis for sunnhet.

- Anta at π er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i π .
- Da har π en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.
- Men da er ikke π et LK-bevis.

□

Kompletthet

Sunnhet

Kompletthet

Introduksjon
Kompletthetsteoremet
Bevis for kompletthetsteoremet

Egenskaper ved utsagnslogikk

Repetisjon

Innledning til førsteordens logikk

Førsteordens logikk - syntaks

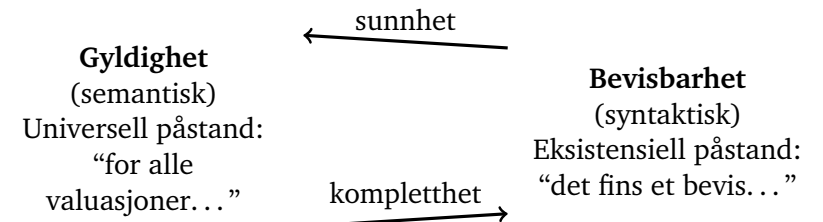
Introduksjon

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK er **sunnet** hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK er **komplett** hvis enhver gyldig sekvent er LK-bevisbar.



Introduksjon

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ gyldig

Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.
- Vi kan dermed uttrykke sunnhet og kompletthet slik:

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar

Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar

En LK-maskin?



Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
 - Da vises for lite.
 - Eksempel med primtall: 2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
 - Da vises for mye.
 - Eksempel med primtall: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...
- Vi ønsker begge deler
 - Hverken for mye eller for lite.
 - Eksempel med primtall: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Kompletthetsteoremet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i LK.

For å vise *kompletthet* av sekventkalkylen, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Eksistens av valuasjon)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar

Dvs. det finnes en valuasjon som gjør samtlige formler i Γ sanne og samtlige formler i Δ usanne.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. “En maksimal utledning”.
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
 - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
 - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La
 - G^\top være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G , og
 - G^\perp være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G , og
 - v være valuasjonen som gjør alle atomære formler i G^\top sanne og alle andre atomære formler (spesielt de i G^\perp) usanne.

Eksempel

$$\frac{\frac{\frac{\times}{P \vdash Q, P} \quad \frac{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vdash Q} \quad \frac{\frac{\times}{R \vdash Q, P} \quad \frac{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q}}{P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q}$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$G^\top = \{R, P \rightarrow Q, P \vee R\}$$

$$G^\perp = \{Q, P, (P \vee R) \rightarrow Q\}$$

v = valuasjonen definert ved $v(R) = 1$ og $v(Q) = v(P) = 0$

Denne valuasjonen falsifiserer rotsekventen.

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i G^\top sanne og alle formler i G^\perp usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:
 - Hvis $A \in G^\top$, så $v(A) = 1$.
 - Hvis $A \in G^\perp$, så $v(A) = 0$.

Basissteg: A er en atomær formel i G^\top/G^\perp .

- Påstanden holder, fordi det var slik vi konstruerte G^\top/G^\perp .

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstanden holder for A og B , så må vi vise at den holder for $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$. Dette gir fire forskjellige tilfeller. (Vi viser tre av dem her.)

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^\top$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^\perp$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \wedge B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 1$.

Anta at $(A \wedge B) \in G^\perp$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 1$.

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^\perp$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 0$.

Egenskaper ved utsagnslogikk

Sunnhet

Kompletthet

Egenskaper ved utsagnslogikk

Uttrykkskraft
Avgjørbarhet
Kompleksitet

Repetisjon

Innledning til førsteordens logikk

Førsteordens logikk - syntaks

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P_j^i være en utsagnsvariabel som tolkes som “objekt nr i ligger i boks nr j ”.
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
 - Objekt 1 ligger i en av boksene: $P_1^1 \vee P_2^1$.
 - Objekt 3 ligger i en av boksene: $P_1^3 \vee P_2^3$.
 - Boks 1 inneholder både objekt 1 og 2: $P_1^1 \wedge P_1^2$.
 - Boks 2 inneholder både objekt 1 og 3: $P_2^1 \wedge P_2^3$.

Avgjørbarhet

Teorem

Utsagnslogikk er avgjørbart, dvs. det fins en algoritme som er i stand til etter endelig mange steg å avgjøre hvorvidt en utsagnslogisk formel er gyldig eller ikke.

- Vår sekventkalkyle gir opphav til en slik algoritme.

Kompleksitet

Teorem

Oppfylbarhetsproblemet for utsagnslogikk - å finne ut hvorvidt en formel/sekvent er oppfylbar eller ikke - er NP-komplett. (Avgjørbart i ikke-deterministisk polynomiell tid.)

Teorem

Gyldighetsproblemet for utsagnslogikk er coNP-komplett.

Repetisjon

Sunnhet

Kompletthet

Egenskaper ved utsagnslogikk

Repetisjon

Innledning til førsteordens logikk

Førsteordens logikk - syntaks

Motivasjon

“Hvis Ole følger inf3170, så liker Ole logikk.”
“Ole følger inf3170, og Ole følger ikke inf3170.”
“Ole følger inf3170, eller Ole følger ikke inf3170.”

- Er utsagnene *sanne*?
- Avhengig av hvordan vi *tolker* utsagnene!
- Finnes det utsagn som alltid er sanne?
- Vi ønsker å en måte å finne slike utsagn på!
- Vi ønsker *matematisk presisjon*, så vi må *formalisere* utsagn og tolkninger.

Formalisering

- Utsagn formaliseres som utsagnslogiske formler.
- Tolkning formaliseres med sannhetsverdier og valuasjoner.

Syntaks: Utsagnslogiske formler

Alfabet

- Utsagnsvariable: P_1, P_2, P_3, \dots
 - Står for *atomære* utsagn, f.eks. *“Ole liker logikk”*.
 - Skrives ofte P, Q, R, \dots pga. lesbarhet.
- Logiske konnektiver: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
 - Brukes til å bygge opp sammensatte utsagn.
- Hjelpesymboler: ‘(, ’’
 - Brukes for å gi entydig parsing av formler.
- Vi kan lage mange uttrykk med disse symbolene:
 - $((\neg \rightarrow \wedge(($
 - $\rightarrow P \wedge ((PP$
 - $\neg(P \wedge (\neg Q \rightarrow P))$
- Vi er kun interessert i uttrykk som samsvarer med de utsagn vi vil analysere!

Induktiv definisjon – stegvis bygge opp en uendelig mengde

Mengden av utsagnslogiske formler – \mathcal{F}_u

Basismengde: Enhver utsagnsvariabel er en utsagnslogisk formel.

Induksjonssteg: Hvis A og B er utsagnslogiske formler, så er

- $\neg A$ en utsagnslogisk formel
- $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$ utsagnslogiske formler.

Basismengde: P, Q, R, \dots

Steg 1: $\neg P, \neg Q, \neg R, \dots$

$(P \wedge P), (P \wedge Q), (P \wedge R), \dots$

$(P \vee P), (P \vee Q), (P \vee R), \dots$

$(P \rightarrow P), (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), \dots$

Steg 2: $\neg\neg P, \neg\neg Q, \neg\neg R$

$(P \wedge \neg P), (\neg P \wedge P), (\neg P \wedge \neg P), (P \wedge \neg Q), \dots$

\vdots

Semantikk: Tolke utsagn – valuasjoner

- Vi skal gi sannhetsverdier, **1** eller **0**, til formler: $(P \rightarrow Q) \vee \neg P$
- **Valuasjoner** er funksjoner fra \mathcal{F}_u til $\text{Bool} = \{1, 0\}$ som overholder bestemte regler m.h.p. konnektivene $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.
- Hvorfor overholde konnektivregler?
- La $v(P) = f(P) = 1$ og $v(Q) = f(Q) = 0$, men la $v(P \rightarrow Q) = 0$ og $f(P \rightarrow Q) = 1$.
 - Begge er funksjoner fra \mathcal{F}_u til **Bool**, men kun v er en valuasjon!
 - f overholder ikke regelen for \rightarrow : Hvis P tolkes som **1** og Q tolkes som **0**, så skal $P \rightarrow Q$ tolkes som **0**.

Konnektivreglene

Konnektivreglene uttrykkes v.h.a. de boolske operatorene $\hat{\neg}, \hat{\wedge}, \hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$.

Oppfylle og falsifisere

- En valuasjon **oppfyller** en utsagnslogisk formel A , $v \models A$, hvis $v(A) = 1$.
- En valuasjon **falsifiserer** en utsagnslogisk formel A , $v \not\models A$, hvis $v(A) = 0$.
- Formelen A er en **tautologi** hvis *alle* valuasjoner oppfyller den.
- Det er det samme som at *ingen* valuasjoner falsifiserer den.

Sekventer og sekventkalkyle

- En **sekvent** er på formen $\Gamma \vdash \Delta$ der Γ og Δ er multimengder av formler.
- En sekvent er **gyldig** hvis enhver valuasjon som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller en formel i Δ .
- En valuasjon v er en **motmodell** til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ .
- En sekvent er **falsifiserbar** hvis den har en motmodell.
- En sekventkalkyle er **sunn** hvis enhver bevisbar sekvent er gyldig.
- En sekventkalkyle er **usunn** hvis det finnes en bevisbar sekvent som er falsifiserbar.
- En sekventkalkyle er **komplett** hvis enhver gyldig sekvent er bevisbar.
- En sekventkalkyle er **ukomplett** hvis det finnes en gyldig sekvent som *ikke* er bevisbar.

Innledning til førsteordens logikk

Sunnhet

Kompletthet

Egenskaper ved utsagnslogikk

Repetisjon

Innledning til førsteordens logikk

Introduksjon

Overblikk

Syntaks – språk og termer

Eksempler på førsteordens språk

Syntaks

Eksempler på førsteordens formler

Førsteordens logikk - syntaks

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene \neg , \wedge , \vee og \rightarrow , og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
 - \exists (eksistenskvantoren) og
 - \forall (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
- Førsteordens logikk er ikke avgjørbart.

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- “Ethvert heltall er enten partall eller oddetall.”
- “Det fins uendelig mange primtall.”
- “Mellom to brøktall fins det annet brøktall.”
- “Hvis a er mindre enn b og b er mindre enn c , så er a mindre enn c .”

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- “Alle Ifi-studenter er late.”
- “Ingen Ifi-studenter er late.”
- “Noen Ifi-studenter er late.”
- “Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen.”
- “Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen.”
- “Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat.”
- “Alle bevisbare formler er gyldige.”
- “Det fins to sheriffer i byen.”

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: tillegg av regler.

Sunnhet: alle bevisbare sekvenser er gyldige.

Kompletthet: alle gyldige sekvenser er bevisbare.

Syntaks – språk og termer

Definisjon (Førsteordens språk - logiske symboler)

Alle **førsteordens språk** består av følgende **logiske symboler**:

- De logiske konnektivene \wedge , \vee , \rightarrow og \neg .
- Hjelpesymbolene ‘(’ og ‘)’ og ‘,’.
- **Kvantorene** \exists (det fins) og \forall (for alle).
- En tellbart uendelig mengde \mathcal{V} av **variable** x_1, x_2, x_3, \dots (vi skriver x, y, z, \dots , for variable).

Syntaks – språk og termer

Definisjon (Førsteordens språk - ikke-logiske symboler)

I tillegg består et **førsteordens språk** av følgende mengder av **ikke-logiske symboler**:

- En tellbar mengde av **konstantsymboler** c_1, c_2, c_3, \dots
- En tellbar mengde av **funksjonssymboler** f_1, f_2, f_3, \dots
- En tellbar mengde av **relasjonssymboler** R_1, R_2, R_3, \dots

Vi antar at mengdene av variable, konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er disjunkte, og vi assosierer med ethvert funksjons- og relasjonssymbol et ikke-negativt heltall, kalt **ariteten** til symbolet.

Syntaks – språk og termer

Merk

- Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.

Definisjon (Signatur)

- De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en **signatur**.
- En signatur angis ved et tuppel $\langle c_1, c_2, c_3, \dots; f_1, f_2, f_3, \dots; R_1, R_2, R_3, \dots \rangle$, hvor konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er adskilt med semikolon.

Syntaks – språk og termer

Definisjon (Termer)

Mengden \mathcal{T} av **første-ordens termer** er induktivt definert som den minste mengden slik at:

- Enhver variabel og konstant er en term.
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer, så er $f(t_1, \dots, t_n)$ en term.

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- $a, x, y, \dots, f(a), f(x), f(y), \dots$
- $g(a, a), g(a, x), g(a, y), g(x, x), g(x, y), g(y, y), \dots$
- $f(f(a)), f(f(x)), f(f(y)), \dots$

Notasjon

Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skrive $fa, fx, fy, gaa, ga_x, \dots$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \dots$
- Ikke termer: $= (x, x), ++, +0, \dots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi **prefiks notasjon**.
- Vi bruker også **infiks notasjon** og skriver: $(x + y), (0 + 0), (s0 + 0), (0 + s0), \dots$

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: 0, 1
- Funksjonssymboler: + og \times (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: = og < (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: \emptyset
- Funksjonssymboler: \cap og \cup (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: = og \in (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:
 $\langle \text{Ola, Kari; mor, far; Mor, Far, Slegtning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slegtning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x , Ola og Kari er termer.
- $\text{mor}(\text{Ola})$, $\text{mor}(\text{Kari})$, $\text{far}(\text{Ola})$ og $\text{far}(\text{Kari})$ er termer.
- $\text{mor}(x)$ og $\text{far}(x)$ er termer.
- $\text{mor}(\text{mor}(x))$ og $\text{mor}(\text{far}(\text{Kari}))$ er termer.

Syntaks

Definisjon (Atomær formel - førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer, så er $R(t_1, \dots, t_n)$ en **atomær formel**.

Merk

- Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.
- Så lenge det er entydig og ariteten er kjent skriver vi Rx , Rfa , $Rafa$, etc. for $R(x)$, $R(f(a))$ og $R(a, f(a))$.

Syntaks

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden \mathcal{F} av **førsteordens formler** er den minste mengden slik at:

1. Alle atomære formler er formler.
2. Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
3. Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være **bundet** i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor **skopet** til den gjeldende kvantoren.

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \text{Idol}, \text{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

- Atomære formler: $\text{Idol}(x)$, $\text{Idol}(a)$, $\text{Liker}(a, a)$, $\text{Liker}(a, b)$
- $\exists x \text{Idol}(x)$ - “det fins et Idol”
- $\forall x \exists y \text{Liker}(x, y)$ - “alle liker noen”
- $\forall x \text{Liker}(x, a)$ - “alle liker a ”
- $\neg \exists x \text{Liker}(x, b)$ - “ingen liker b ”
- $\forall x (\text{Idol}(x) \rightarrow \text{Liker}(x, x))$ - “alle idoler liker seg selv”

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, så har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - “en pluss en er to”
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ - “addisjon er kommutativt”
- $\forall x \exists y (y = sx)$ - “alle tall har en etterfølger”
- $\neg \exists x (0 = sx)$ - “0 er ikke etterfølgeren til noe”
- $\exists x \exists y \neg (x = y)$ - “det fins to forskjellige objekter”

Førsteordens logikk - syntaks

Sunnhet

Kompletthet

Egenskaper ved utsagnslogikk

Repetisjon

Innledning til førsteordens logikk

Førsteordens logikk - syntaks

Repetisjon og presiseringer

Frie variable i termer

Rekursive definisjoner

Repetisjon og presiseringer

Et førsteordens språk \mathcal{L} består av:

1. Logiske symboler

- konnektiver: $\wedge, \vee, \rightarrow$ og \neg
- hjelpesymboler: '(' og ') ' og ';
- kvantorer: \exists og \forall
- variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

2. Ikke-logiske symboler:

- en tellbar mengde konstantsymboler
- en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
- en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en **signatur**

$\langle \underbrace{c_1, c_2, c_3, \dots}_{\text{konstantsymboler}} ; \underbrace{f_1, f_2, f_3, \dots}_{\text{funksjonssymboler}} ; \underbrace{R_1, R_2, R_3, \dots}_{\text{relasjonssymboler}} \rangle$.

Repetisjon og presiseringer

Vi så følgende signaturer sist:

enkelt språk:	\langle	a	$;$	f, g	$;$	P, R	\rangle
aritmetikk 1:	\langle	0	$;$	$s, +$	$;$	$=$	\rangle
aritmetikk 2:	\langle	$0, 1$	$;$	$+, \times$	$;$	$=, <$	\rangle
mengdelære:	\langle	\emptyset	$;$	\cap, \cup	$;$	$=, \in$	\rangle
familierelasjoner:	\langle	Ola, Kari	$;$	mor, far	$;$	Mor, Far, Slektning	\rangle
beundring:	\langle	a, b	$;$		$;$	Idol, Liker	\rangle

Repetisjon og presiseringer

Hvis et førsteordens språk \mathcal{L} er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden \mathcal{T} av termer i \mathcal{L} :

- Enhver variabel og konstant er en term.
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer, så er $f(t_1, \dots, t_n)$ en term.

2. Mengden \mathcal{F} av formler i \mathcal{L} :

- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer, så er $R(t_1, \dots, t_n)$ en (atomær) formel.
- Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
- Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Repetisjon og presiseringer

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker} \rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x (\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x (\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x (\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$ $\forall x (\text{Liker}(x, a) \rightarrow \neg \text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x (\text{Liker}(b, x) \wedge \text{Liker}(x, a))$
9:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x (\forall y \text{Liker}(y, x) \rightarrow \text{Idol}(x))$
10:	Et idol blir likt av alle:	$\forall x (\text{Idol}(x) \rightarrow \forall y \text{Liker}(y, x))$

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$FV(t)$ betegner mengden av **frie variable** i termen t .

Definisjon (Lukket term)

En term t er **lukket** hvis $FV(t) = \emptyset$, dvs. t inneholder ingen frie variable.

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ har vi:

- Termen $f(x, a)$ har en fri variabel x .
- Termen $f(a, b)$ har ingen frie variable og er en lukket term.

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden **rekursivt** ved å

1. gi verdi til de “atomære” elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til “sammensatte” elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable - definert rekursivt)

Gitt en term t , la mengden $FV(t)$ av **frie variable** i t være definert rekursivt ved:

- $FV(x_i) = \{x_i\}$, for en variabel x_i , og
- $FV(c_i) = \emptyset$, for en konstant c_i , og
- $FV(f(t_1, \dots, t_n)) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n)$, for et funksjonssymbol f med aritet n .