INF3170 – Forelesning 5

Førsteordens logikk – syntaks og semantikk

- 23. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-09 17:41)

Dagens plan

Innhold

Førsteordens logikk - syntaks

Frie variable i formler

Definisjon.
¡2-¿[Frie variable i en formel] En variabelforekomst i en førsteordens formel er *fri* hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathsf{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel.
¡3-¿[$\forall x Rxy \land Pz$]

- x er bundet
- y er fri
- z er fri

Eksempel.
¡7-¿[$\forall x Pxy \to \forall z Pzx$]

- x er bundet
- x er fri
- y er fri
- z er bundet

Oppgave.
¡12-¿ Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.

Substitusjoner

Definisjon.
¡2-¿[Substitusjon for termer] La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[t/x] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).

Eksempel.
¡7-¿

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

Definisjon.
¡2-¿[Substitusjon for formler] $\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$

2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[t/x] = \begin{cases} Qy(\psi[t/x]) & \text{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \text{ellers} \end{cases}$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel.
¡12-¿

- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall x Pxy)$
- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[a/y] = (Pxa \wedge \forall x Pxa)$

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel.
¡4-¿

- $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \mathsf{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Definisjon.
Vi sier at t *er fri for* x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i φ.

Eksempel.
¡3-¿Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \mathsf{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er “fri for”, dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel).
En formel φ er *lukket* hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er *åpen* hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel.

- $\forall x P x a$ er lukket
- $\forall x P x y$ er *ikke* lukket
- $P x y$ er *ikke* lukket, men åpen
- $P a b$ er åpen *og* lukket

Førsteordens logikk - semantikk

Introduksjon

- Hvordan skal vi *tolke* førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel *sann* / *gyldig* / *oppfyllbar*?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil *modeller* gi oss en semantikk.

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk
Hvis D en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geqslant 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \mid d_1, \ldots, d_n \in D\}$$

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell).
En *modell* $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt *domenet* til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.
- Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n, så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n, så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen $\mathcal{M}$.

Noen kommentarer

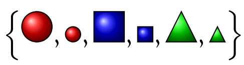
1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

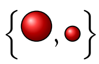
Hovedeksempel - et figurspråk

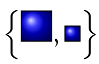
Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

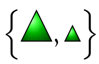
- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:
  Sirkel(x): "x er en sirkel"
  Firkant(x): "x er en firkant"
  Trekant(x): "x er en trekant"
  Stor(x): "x er stor"
  Liten(x): "x er liten"
  Mindre(x, y): "x er mindre enn y"

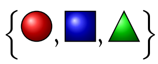
La oss nå lage en modell for dette språket!

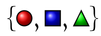
En tolkning av figurspråket
La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D =$ .

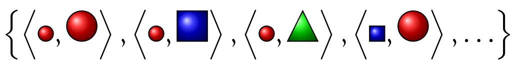
$a^{\mathcal{M}} =$  Sirkel$^{\mathcal{M}} =$ 

$b^{\mathcal{M}} =$  Firkant$^{\mathcal{M}} =$ 

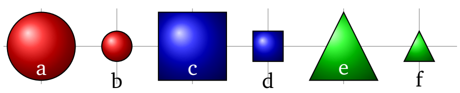
$c^{\mathcal{M}} =$  Trekant$^{\mathcal{M}} =$ 

$d^{\mathcal{M}} =$  Stor$^{\mathcal{M}} =$ 

$e^{\mathcal{M}} =$  Liten$^{\mathcal{M}} =$ 

$f^{\mathcal{M}} =$  Mindre$^{\mathcal{M}} =$ 

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)
- Mindre(a, a)

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon.
¡4-¿[Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$] La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til *nye* konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi $\bar{a}$ for den nye konstanten. Hvis $\mathcal{N}$ er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.

- Når vi tolker termer og formler fra språket $\mathcal{L}$ i en modell $\mathcal{M}$, så bruker vi det utvidete språket $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ og antar at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Definisjon (Tolkning av lukkede termer).
La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \ldots, t_n)$ på følgende måte:

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

Oppgave.
Dette er en rekursiv definisjon. Skriv ut hele definisjonen.

Definisjon (Tolkning av lukkede formler).
La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er *sann* i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det *ikke* er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *og* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x \varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for alle* a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for minst en* a i $|\mathcal{M}|$.

Definisjon.
¡2-¿[Oppfyllbarhet] En lukket formel φ er *oppfyllbar* hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathsf{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathsf{Liten}(x) \land \mathsf{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\mathsf{Liten}(x) \land \neg \mathsf{Liten}(x))$
- $\neg \mathsf{Stor}(a) \land \forall x \mathsf{Stor}(x)$

Definisjon.
¡2-¿[Gyldighet] En lukket formel φ er *gyldig* hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den *falsifiserbar*.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \land \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathsf{Liten}(x) \lor \exists x \neg \mathsf{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathsf{Stor}(x) \rightarrow \forall x \mathsf{Stor}(x)$
- $\exists x Px \rightarrow \exists x(Px \land Qx)$

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 🏭$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (🏭 har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

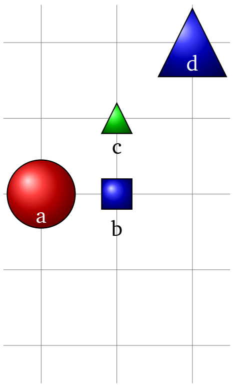
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det *ikke* er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *og* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for alle* a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for minst en* a i $|\mathcal{M}|$.

Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å “fange inn” og beskrive virkeligheten.

En utvidelse av figurspråket

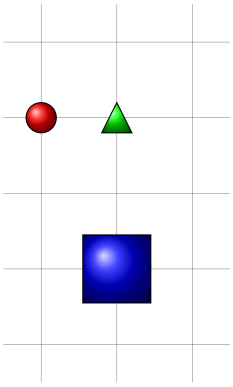
Atomær formel	Intendert tolkning
$\mathsf{Sirkel}(x)$	x er en sirkel
$\mathsf{Firkant}(x)$	x er en firkant
$\mathsf{Trekant}(x)$	x er en trekant
$\mathsf{Stor}(x)$	x er stor
$\mathsf{Liten}(x)$	x er liten
$\mathsf{Mindre}(x, y)$	x er mindre enn y
$\mathsf{Over}(x, y)$	x er nærmere toppen enn y
$\mathsf{Under}(x, y)$	x er nærmere bunnen enn y
$\mathsf{VenstreFor}(x, y)$	x er lenger til venstre enn y
$\mathsf{HoyreFor}(x, y)$	x er lenger til høyre enn y
$\mathsf{Inntil}(x, y)$	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
$\mathsf{Mellom}(x, y, z)$	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$, $b^{\mathcal{M}} =$, $c^{\mathcal{M}} =$, $d^{\mathcal{M}} =$
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle , \rangle \in \mathsf{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\mathsf{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{VenstreFor}(a, c) \wedge \neg\mathsf{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Inntil}(a, b) \wedge \neg\mathsf{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Mellom}(c, a, d) \wedge \neg\mathsf{Mellom}(c, b, d)$

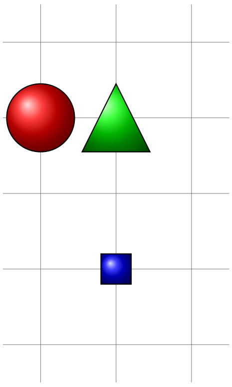
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \mathsf{Liten}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$

- Siden $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$, kan vi konkludere med **JA**.



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{array}{c} \mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x) \\ \Updownarrow \\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a}) \\ \Updownarrow \\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} \\ \Updownarrow \\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} \end{array}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$ og $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, så kan vi konkludere med **NEI**.