

INF3170 – Logikk

Forelesning 5: Førsteordens logikk – syntaks og semantikk

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

23. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-09 17:42)



Førsteordens logikk - syntaks

Førsteordens logikk - syntaks

Frie variable i formler

Substitusjoner

Lukkede og åpne formler

Førsteordens logikk - semantikk

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er **fri** hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $FV(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ .

Eksempel ($\forall x Rxy \wedge Pz$)

- x er bundet
- y er fri
- z er fri

Eksempel ($\forall x Pxy \rightarrow \forall z Pzx$)

- x er bundet
- x er fri
- y er fri
- z er bundet

Oppgave

Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t , definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[t/x] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$).

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \dots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[t/x] = \begin{cases} Qy(\psi[t/x]) & \text{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \text{ellers} \end{cases}$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/x] = (P ay \wedge \forall xPxy)$
- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/y] = (Pxa \wedge \forall xPxa)$

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \text{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \text{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substituere t for x i φ .

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \text{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \text{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \text{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er “fri for”, dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er **lukket** hvis $FV(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er **åpen** hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- $\forall x P x a$ er lukket
- $\forall x P x y$ er *ikke* lukket
- $P x y$ er *ikke* lukket, men åpen
- $P a b$ er åpen og lukket

Førsteordens logikk - semantikk

Førsteordens logikk - syntaks

Førsteordens logikk - semantikk

Introduksjon

Modeller

Hovedeksempel - et figurspråk

Tolkning av termer og formler

Oppsummering

Språk og modeller - et komplekst forhold

En utvidelse av figurspråket

Oppfylldbarhet av førsteordens formler

Introduksjon

- Hvordan skal vi **tolke** førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?
(Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel **sann** / **gyldig** / **oppfylldbar**?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
 - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil **modeller** gi oss en semantikk.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
 - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
 - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
 - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D en mengde, så består D^n av alle n -tupler av elementer fra D , for $n \geq 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \dots, d_n \rangle \mid d_1, \dots, d_n \in D\}$$

Modeller

La et førsteordens språk \mathcal{L} være gitt.

Definisjon (Modell)

En **modell** \mathcal{M} for \mathcal{L} består av en ikke-tom mengde D , kalt **domenet** til \mathcal{M} , og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n , så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \dots \times D}_n$ til D .
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n , så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \dots \times D}_n$.

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen \mathcal{M} .

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
 - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D .
 - Siden D^0 består av kun ett element $\langle \rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle \rangle, e$, hvor $e \in D$.
 - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e .
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
 - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0 .
 - Siden D^0 består av kun ett element $\langle \rangle$ - det tomme tuppelet - så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
 - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
 - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e \rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e .
 - Når et relasjonssymbol R har aritet 1, så skriver vi derfor $\{e_1, \dots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle\}$.
 - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f .
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:
 - Sirkel(x): “ x er en sirkel”
 - Firkant(x): “ x er en firkant”
 - Trekant(x): “ x er en trekant”
 - Stor(x): “ x er stor”
 - Liten(x): “ x er liten”
 - Mindre(x, y): “ x er mindre enn y ”

La oss nå lage en modell for dette språket!

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La \mathcal{M} være en modell med domene $D = \{\text{rød sirkel, rød sirkel, blå firkant, blå firkant, grønn trekant, grønn trekant}\}$.

$$a^{\mathcal{M}} = \text{rød sirkel} \quad \text{Sirkel}^{\mathcal{M}} = \{\text{rød sirkel, rød sirkel}\}$$

$$b^{\mathcal{M}} = \text{rød sirkel} \quad \text{Firkant}^{\mathcal{M}} = \{\text{blå firkant, blå firkant}\}$$

$$c^{\mathcal{M}} = \text{blå firkant} \quad \text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{\text{grønn trekant, grønn trekant}\}$$

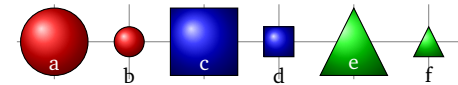
$$d^{\mathcal{M}} = \text{blå firkant} \quad \text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{\text{rød sirkel, blå firkant, grønn trekant}\}$$

$$e^{\mathcal{M}} = \text{grønn trekant} \quad \text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{\text{rød sirkel, blå firkant, grønn trekant}\}$$

$$f^{\mathcal{M}} = \text{grønn trekant} \quad \text{Mindre}^{\mathcal{M}} = \{\langle \text{rød sirkel, rød sirkel} \rangle, \langle \text{rød sirkel, blå firkant} \rangle, \langle \text{rød sirkel, grønn trekant} \rangle, \langle \text{blå firkant, rød sirkel} \rangle, \dots\}$$

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen \mathcal{M} .



Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)
- Mindre(a, a)

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra \mathcal{L} ved å legge til nye konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi \bar{a} for den nye konstanten. Hvis \mathcal{N} er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.

- Når vi tolker termer og formler fra språket \mathcal{L} i en modell \mathcal{M} , så bruker vi det utvidete språket $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ og antar at \mathcal{M} er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -modell.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . Anta at \mathcal{M} er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -modell. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \dots, t_n)$ på følgende måte:

$$f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

Oppgave

Dette er en rekursiv definisjon. Skriv ut hele definisjonen.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . Anta at \mathcal{M} er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er **sann** i \mathcal{M} ; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i \mathcal{M} / \mathcal{M} gjør φ sann.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det **ikke** er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **og** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **eller** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **impliserer** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ **for alle** a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ **for minst en** a i $|\mathcal{M}|$.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfylldhet)

En lukket formel φ er **oppfylld** hvis det fins en modell \mathcal{M} som gjør φ sann. Vi sier også at \mathcal{M} oppfylder φ og at \mathcal{M} er en modell for φ .

Oppfylld

- $\exists x \text{Liten}(x)$
- $\exists x(\text{Liten}(x) \wedge \text{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfylld

- $Pa \wedge \neg Pa$
- $\exists x(\text{Liten}(x) \wedge \neg \text{Liten}(x))$
- $\neg \text{Stor}(a) \wedge \forall x \text{Stor}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er **gyldig** hvis den er sann i alle modeller \mathcal{M} , ellers så er den **falsifiserbar**.

Gyldig

- $\forall x Px \rightarrow \forall z Pz$
- $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \text{Liten}(x) \vee \exists x \neg \text{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsifiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \text{Stor}(x) \rightarrow \forall x \text{Stor}(x)$
- $\exists x Px \rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$

Oppsummering

En modell \mathcal{M} for et språk \mathcal{L} består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til \mathcal{M} , og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis \mathcal{L} er språket $\langle \text{!}, \text{#}, \text{☞}; \text{☞}; \text{♀}, \text{♂} \rangle$, så må en modell \mathcal{M} gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- $\text{!}^{\mathcal{M}}$, $\text{#}^{\mathcal{M}}$ og $\text{☞}^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- $\text{☞}^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- $\text{♀}^{\mathcal{M}}$ og $\text{♂}^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (☞ har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Oppsummering

Hvis \mathcal{M} er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det **ikke** er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **og** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **eller** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **impliserer** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ **for alle** a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ **for minst en** a i $|\mathcal{M}|$.

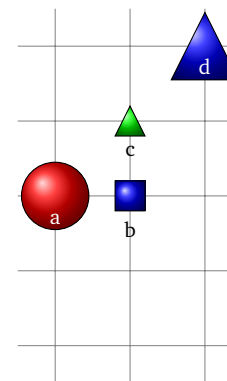
Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
 - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
 - Sjekke om en formel er oppfylbar eller falsifiserbar.
 - Sjekke om en formel er gyldig.
 - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
 - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å “fange inn” og beskrive virkeligheten.

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
Mellom(x, y, z)	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z

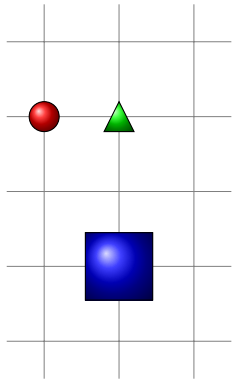
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} = \text{red circle}, b^{\mathcal{M}} = \text{blue square}, c^{\mathcal{M}} = \text{green triangle}, d^{\mathcal{M}} = \text{blue triangle}$
(vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{\text{green triangle}, \text{blue triangle}\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{\text{red circle}, \text{blue triangle}\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{\text{blue square}, \text{green triangle}\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle \text{red circle}, \text{green triangle} \rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg \text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \wedge \neg \text{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Inntil}(a, b) \wedge \neg \text{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(c, a, d) \wedge \neg \text{Mellom}(c, b, d)$

Oppfylbarhet av førsteordens formler

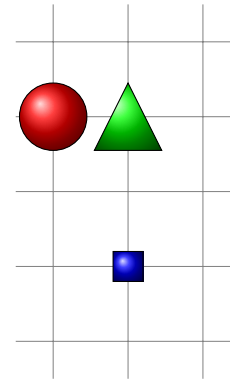


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av \models .

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x) \\ & \iff \\ & \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \text{Liten}(\bar{a}) \\ & \iff \\ & \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \text{Liten}^{\mathcal{M}} \\ & \iff \\ & \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \text{Liten}^{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

- Siden $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{\bullet, \blacktriangle\}$, kan vi konkludere med **JA**.

Oppfylbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \text{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av \models .

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \models \forall x \text{Stor}(x) \\ & \iff \\ & \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \text{Stor}(\bar{a}) \\ & \iff \\ & \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \text{Stor}^{\mathcal{M}} \\ & \iff \\ & \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \text{Stor}^{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}$ og $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{\bullet, \blacktriangle\}$, så kan vi konkludere med **NEI**.