INF3170 – Logikk

Forelesning 5: Førsteordens logikk – syntaks og semantikk

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

23. februar 2010

(Sist oppdatert: 2010-02-09 17:41)

Førsteordens logikk - syntaks

Førsteordens logikk - syntaks

Frie variable i formler

Substitusjoner

Lukkede og åpne formler

Førsteordens logikk - semantikk

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $FV(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x er bundet
- y er fri
- z er fri

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

- x er bundet
- x er fri
- y er fri
- z er bundet

Oppgave

Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[t/x] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[t/x] = \begin{cases} Qy(\psi[t/x]) & \text{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \text{ellers} \end{cases}$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall xPxy)$
- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/y] = (Pxa \wedge \forall xPxa)$

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \mathsf{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \mathsf{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er “fri for”, dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- $\forall x Pxa$ er lukket
- $\forall x Pxy$ er *ikke* lukket
- Pxy er *ikke* lukket, men åpen
- Pab er åpen *og* lukket

Førsteordens logikk - semantikk

Førsteordens logikk - syntaks

Førsteordens logikk - semantikk

- Introduksjon
- Modeller
- Hovedeksempel - et figurspråk
- Tolkning av termer og formler
- Oppsummering
- Språk og modeller - et komplekst forhold
- En utvidelse av figurspråket
- Oppfyllbarhet av førsteordens formler

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil modeller gi oss en semantikk.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
    - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
    - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
    - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geqslant 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \mid d_1, \ldots, d_n \in D\}$$

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.
- Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n, så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n, så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen $\mathcal{M}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1, så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  $\mathsf{Sirkel}(x)$: "x er en sirkel"

  $\mathsf{Firkant}(x)$: "x er en firkant"

  $\mathsf{Trekant}(x)$: "x er en trekant"

  $\mathsf{Stor}(x)$: "x er stor"

  $\mathsf{Liten}(x)$: "x er liten"

  $\mathsf{Mindre}(x, y)$: "x er mindre enn y"

La oss nå lage en modell for dette språket!

Hovedeksempel - et figurspråk

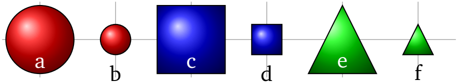
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{\bullet, {\scriptstyle\bullet}, \blacksquare, {\scriptstyle\blacksquare}, \blacktriangle, {\scriptstyle\blacktriangle}\}$.

$$
\begin{array}{lll}
a^{\mathcal{M}} = \bullet & \mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}} & = \{\bullet, {\scriptstyle\bullet}\} \\
b^{\mathcal{M}} = {\scriptstyle\bullet} & \mathsf{Firkant}^{\mathcal{M}} & = \{\blacksquare, {\scriptstyle\blacksquare}\} \\
c^{\mathcal{M}} = \blacksquare & \mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}} & = \{\blacktriangle, {\scriptstyle\blacktriangle}\} \\
d^{\mathcal{M}} = {\scriptstyle\blacksquare} & \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} & = \{\bullet, \blacksquare, \blacktriangle\} \\
e^{\mathcal{M}} = \blacktriangle & \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} & = \{{\scriptstyle\bullet}, {\scriptstyle\blacksquare}, {\scriptstyle\blacktriangle}\} \\
f^{\mathcal{M}} = {\scriptstyle\blacktriangle} & \mathsf{Mindre}^{\mathcal{M}} & = \{\langle {\scriptstyle\bullet}, \bullet \rangle, \langle {\scriptstyle\bullet}, \blacksquare \rangle, \langle {\scriptstyle\bullet}, \blacktriangle \rangle, \langle {\scriptstyle\blacksquare}, \bullet \rangle, \ldots\}
\end{array}
$$

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

- $\textsf{Sirkel}(a)$
- $\textsf{Firkant}(c)$
- $\textsf{Liten}(b)$
- $\textsf{Mindre}(b, e)$

Usant

- $\textsf{Trekant}(a)$
- $\textsf{Stor}(b)$
- $\textsf{Mindre}(a, b)$
- $\textsf{Mindre}(a, a)$

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til *nye* konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi $\bar{a}$ for den nye konstanten. Hvis $\mathcal{N}$ er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.

- Når vi tolker termer og formler fra språket $\mathcal{L}$ i en modell $\mathcal{M}$, så bruker vi det utvidete språket $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ og antar at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \ldots, t_n)$ på følgende måte:

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

Oppgave

Dette er en rekursiv definisjon. Skriv ut hele definisjonen.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathsf{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathsf{Liten}(x) \land \mathsf{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\mathsf{Liten}(x) \land \neg \mathsf{Liten}(x))$
- $\neg \mathsf{Stor}(a) \land \forall x \mathsf{Stor}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \land \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathsf{Liten}(x) \lor \exists x \neg \mathsf{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathsf{Stor}(x) \rightarrow \forall x \mathsf{Stor}(x)$
- $\exists x Px \rightarrow \exists x (Px \land Qx)$

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚹 , 🚺 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚹$^{\mathcal{M}}$, 🚺$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 🏭$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (🏭 har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.

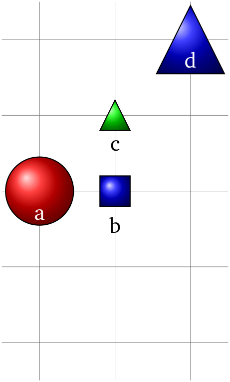
Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å “fange inn” og beskrive virkeligheten.

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
$\mathsf{Sirkel}(x)$	x er en sirkel
$\mathsf{Firkant}(x)$	x er en firkant
$\mathsf{Trekant}(x)$	x er en trekant
$\mathsf{Stor}(x)$	x er stor
$\mathsf{Liten}(x)$	x er liten
$\mathsf{Mindre}(x, y)$	x er mindre enn y
$\mathsf{Over}(x, y)$	x er nærmere toppen enn y
$\mathsf{Under}(x, y)$	x er nærmere bunnen enn y
$\mathsf{VenstreFor}(x, y)$	x er lenger til venstre enn y
$\mathsf{HoyreFor}(x, y)$	x er lenger til høyre enn y
$\mathsf{Inntil}(x, y)$	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
$\mathsf{Mellom}(x, y, z)$	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z

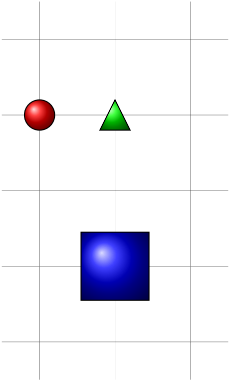
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \mathsf{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\mathsf{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{VenstreFor}(a, c) \land \neg\mathsf{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Inntil}(a, b) \land \neg\mathsf{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Mellom}(c, a, d) \land \neg\mathsf{Mellom}(c, b, d)$

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

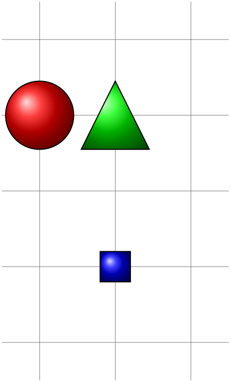


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \mathsf{Liten}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$$

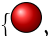
- Siden $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, kan vi konkludere med **JA**.

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a}) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}
\end{gathered}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$ og $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, så kan vi konkludere med **NEI**.