INF3170 – Logikk

Forelesning 7: Sekventkalkyle for førsteordens logikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

16. mars 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-06 11:15)

Førsteordens sekventkalkyle

Førsteordens sekventkalkyle

- Introduksjon
- Sekventer og aksiomer
- Sekventkalkyleregler
- Slutninger
- Utledninger
- Bevis

Introduksjon

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og komplettheit av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se på et eksempel.

$$\forall x(Px \to Qx) \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$$

Eksempel

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.

$$\frac{\forall x(Px \to Qx) \;\vdash\; \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx) \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.

$$\frac{\forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.

$$\dfrac{\dfrac{Pa \to Qa \ \vdash \ \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash\ Pa, \neg Qa \to \neg Pa \qquad\qquad Qa\ \vdash\ \neg Qa \to \neg Pa}{Pa \to Qa\ \vdash\ \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx)\ \vdash\ \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx)\ \vdash\ \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}{\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \qquad Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{Pa \rightarrow Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Qa, Pa \vdash Pa}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \qquad Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{Pa \rightarrow Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Qa, {\color{red}Pa} \vdash {\color{red}Pa}}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \neg Qa, Pa \vdash Pa\end{array}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}{Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Qa, Pa \vdash Pa}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{Qa \vdash Qa, \neg Pa}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}}{Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{Pa \rightarrow Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \neg Qa, Pa \vdash Pa\end{array}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ {\color{red}Qa} \vdash {\color{red}Qa}, \neg Pa\end{array}}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}}{Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\forall x(Px \to Qx) \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x?

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{Po \to Qo \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{Po \rightarrow Qo \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{Po \to Qo \ \vdash \ \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\cfrac{\cfrac{Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\color{red}{\forall x(Px \to Qx)} \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\color{red}{\forall x(Px \to Qx)}$. Da må vi kunne sette inn a for x!

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \ \vdash \ \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \ \vdash \ \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \;\vdash\; \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \;\vdash\; \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa \qquad \forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa$}
\AxiomC{$\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\BinaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$}
\end{prooftree}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \;\vdash\; \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \;\vdash\; Pa, \neg Qa \to \neg Pa}
        \qquad
        \dfrac{\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \;\vdash\; \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \;\vdash\; \neg Qa \to \neg Pa}
      }{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \;\vdash\; \neg Qa \to \neg Pa}
    }{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \;\vdash\; \neg Qa \to \neg Pa}
  }{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
}{\forall x(Px \to Qx) \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \quad \dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash Qa, \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \;\vdash\; \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \;\vdash\; Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \to Qx), {\color{red}Qa}, Po \to Qo \;\vdash\; {\color{red}Qa}, \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \;\vdash\; \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \;\vdash\; \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \;\vdash\; \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \;\vdash\; \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \;\vdash\; \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x \varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x \varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x \varphi$.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x \varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x \varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x \varphi$ må vi velge et vitne – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x \varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x \varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x \varphi$ må vi velge et vitne – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
  - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x \varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x \varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x \varphi$ må vi velge et vitne – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
  - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som sekvent, aksiom, utledning og bevis for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt parametre, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt parametre, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt parametre, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær formel.

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$
- $Pa, \forall x(Qx \rightarrow Rx) \vdash Qb \rightarrow Rb$

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$
- $Pa, \forall x(Qx \rightarrow Rx) \vdash Qb \rightarrow Rb$
- $\forall x Px, Pa \vdash Pa, \exists x Pa$

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$
- $Pa, \forall x(Qx \to Rx) \vdash Qb \to Rb$
- $\forall x Px, Pa \vdash Pa, \exists x Pa$

Hvilke av sekventene over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK er:

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK er:

t er en lukket term

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} \, \mathsf{L}\forall$$

t er en lukket term

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

t er en lukket term

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \text{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi} \text{R}\exists$$

t er en lukket term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ-reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Sekventkalkyleregler

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK er:

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK er:

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists \qquad\qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor veldefinerte i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor veldefinerte i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK)

Slutningsreglene i førsteordens LK er α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK og γ- og δ-reglene.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \ \vdash \ Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \Bigg| \qquad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \ \vdash \ Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \ \vdash \ Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \quad\Bigg|\quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \;\vdash\; \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \;\vdash\; \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \Bigg| \qquad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \;\vdash\; Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \;\vdash\; Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \mathsf{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \ \vdash \ Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ Qa} \mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

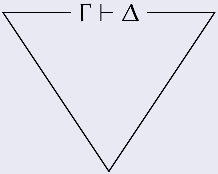
Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Merk: språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ-reglene.

Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

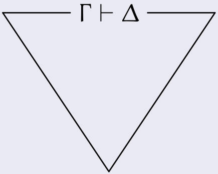
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

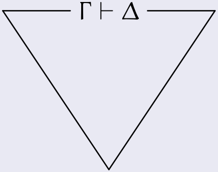
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

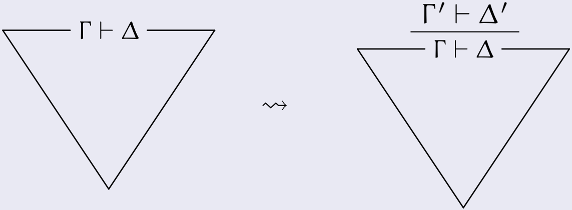
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

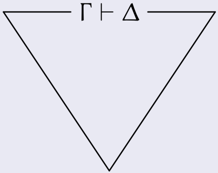
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

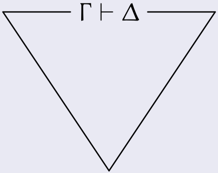
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

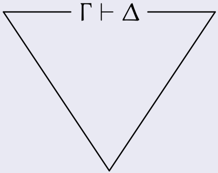
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

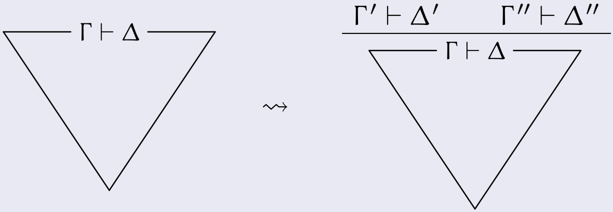
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Bevis

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.