INF3170 – Forelesning 7

Sekventkalkyle for førsteordens logikk

Roger Antonsen - 16. mars 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-06 11:15)

Innhold

Førsteordens sekventkalkyle

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se på et eksempel.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Qa, Pa \vdash Pa}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Qa \vdash Qa, \neg Pa}}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}}{Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.

- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa$}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash Qa, \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\BinaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$}
\end{prooftree}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et *vitne* – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
  - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som *sekvent*, *aksiom*, *utledning* og *bevis* for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter).
La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt *parametre*, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent).
En *sekvent* er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av *lukkede* førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.

Definisjon (Aksiom).
Et *aksiom* er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en *atomær* formel.

Oppgave.
Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$
- $Pa, \forall x(Qx \to Rx) \vdash Qb \to Rb$
- $\forall x Px, Pa \vdash Pa, \exists x Pa$

Hvilke av sekventene over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler).
γ-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \;\vdash\; \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \;\vdash\; \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\vdash\; \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \;\vdash\; \Delta, \exists x\varphi}\,\mathsf{R}\exists$$

t er en *lukket* term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ-reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Definisjon (δ-regler).
δ-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \;\vdash\; \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \;\vdash\; \Delta}\,\mathsf{L}\exists \qquad\qquad \frac{\Gamma \;\vdash\; \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \;\vdash\; \Delta, \forall x\varphi}\,\mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som *ikke* forekommer i konklusjonen.

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor *veldefinerte* i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK).
Slutningsreglene i førsteordens LK er α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK *og* γ- og δ-reglene.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene *slutninger* ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \ \vdash \ Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \ \vdash \ Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles *premisser*.
- Sekventen *under* streken kalles *konklusjon*.
- Teksten til høyre for streken er regelens *navn*.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles *hovedformel*.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles *aktive formler*.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles *ekstraformler*.

Utledninger

- *Ett-premissregler*: α-, γ- og δ-reglene.
- *To-premissregler*: β-reglene.

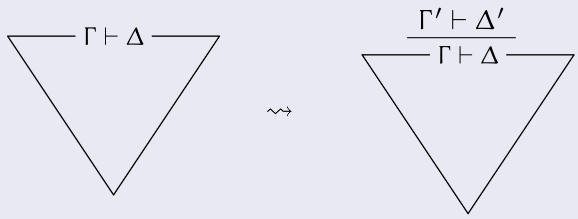
Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle).
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en *LK-utledning*.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

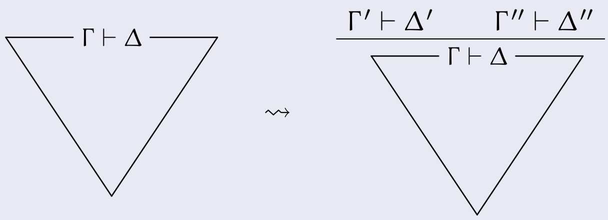
Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Merk: språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ-reglene.

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse).
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-*utledning*.



Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse).
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-*utledning*.



Bevis

Definisjon (LK-bevis).
Et LK-*bevis* er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar).
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-*bevisbar* hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.