

INF3170 – Logikk

Forelesning 7: Sekventkalkyle for førsteordens logikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

16. mars 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-06 11:15)



Førsteordens sekventkalkyle

Førsteordens sekventkalkyle

Introduksjon

Sekventer og aksiomer

Sekventkalkyleregler

Slutninger

Utledninger

Bevis

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ , er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se på et eksempel.

$$\begin{array}{c}
\times \\
\frac{\neg Qa, Pa \vdash Pa}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa} \\
\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\frac{Pa \rightarrow Qa \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\times \\
\frac{Qa \vdash Qa, \neg Pa}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa} \\
Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\frac{Pa \rightarrow Qa \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)
\end{array}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\begin{array}{c}
\times \\
\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Pa, Po \rightarrow Qo \vdash Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa, Pa} \\
\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \quad \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\times \\
\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, Po \rightarrow Qo \vdash Qa, \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa} \\
\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \quad \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
\end{array}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x :
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene \forall/\exists .
- Fra de foregående eksemplene har vi:
 - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t .
 - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
 - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et *vitne* – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
 - Å oppfylle/falsifisere \exists -formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som **sekvent**, **aksiom**, **utledning** og **bevis** for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt **parametre**, forskjellige fra konstantsymbolene i \mathcal{L} . La \mathcal{L}^{par} være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent)

En **sekvent** er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av **lukkede** førsteordens formler i \mathcal{L}^{par} .

Definisjon (Aksiom)

Et **aksiom** er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en **atomær** formel.

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$
- $Pa, \forall x(Qx \rightarrow Rx) \vdash Qb \rightarrow Rb$
- $\forall x Px, Pa \vdash Pa, \exists x Pa$

Hvilke av sekventene over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ -regler)

γ -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi} R\exists$$

t er en **lukket** term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ -reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ -regler)

δ -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} R\forall$$

a er en parameter som **ikke** forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

- γ -reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ -reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ - og δ -reglene er derfor **veldefinerte** i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK)

Slutningsreglene i førsteordens LK er α - og β -reglene fra utsagnslogisk LK og γ - og δ -reglene.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene **slutninger** ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad \left| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} L\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles **premisser**.
- Sekventen *under* streken kalles **konklusjon**.
- Teksten til høyre for streken er regelens **navn**.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles **hovedformel**.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles **aktive formler**.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles **ekstraformler**.

Utledninger

- Ett-premissregler:** α -, γ - og δ -reglene.
- To-premissregler:** β -reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i \mathcal{L} , er en **LK-utledning**.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

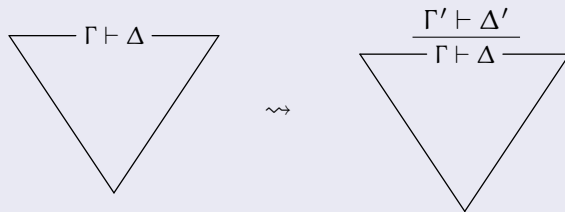
Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Merk: språket \mathcal{L}^{par} brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ -reglene.

Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

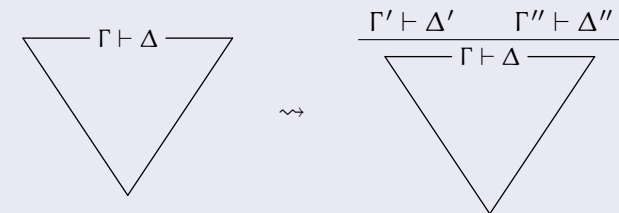
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en **LK-utledning**.



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en **LK-utledning**.



Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **LK-bevisbar** hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.