

INF3170 – Logikk

Forelesning 7: Sekventkalkyle for førsteordens logikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

16. mars 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-06 11:14)



Førsteordens sekventkalkyle

Førsteordens sekventkalkyle

Introduksjon

Sekventer og aksiomer

Sekventkalkyleregler

Slutninger

Utledninger

Bevis

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ , er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se på et eksempel.

$$\begin{array}{c}
\times \\
\hline
\neg Qa, Pa \vdash Pa \\
\hline
\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa \\
\hline
\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\hline
Pa \rightarrow Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\hline
\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\hline
\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\times \\
\hline
Qa \vdash Qa, \neg Pa \\
\hline
Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa \\
\hline
Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\hline
\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)
\end{array}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Pa, Po \rightarrow Qo \vdash Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}}
 \end{array}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene \forall/\exists .
- Fra de foregående eksemplene har vi:
 - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t .
 - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
 - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et **vitne** – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
 - Å oppfylle/falsifisere \exists -formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som **sekvent**, **aksiom**, **utledning** og **bevis** for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt **parametre**, forskjellige fra konstantsymbolene i \mathcal{L} . La \mathcal{L}^{par} være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent)

En **sekvent** er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av **lukkede** førsteordens formler i \mathcal{L}^{par} .

Definisjon (Aksiom)

Et **aksiom** er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en **atomær** formel.

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall xPx \vdash \exists xQx$
- $Pa, \forall x(Qx \rightarrow Rx) \vdash Qb \rightarrow Rb$
- $\forall xPx, Pa \vdash Pa, \exists xPa$

Hvilke av sekventene over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ -regler)

γ -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

t er en **lukket** term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ -reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ -regler)

δ -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} R\forall$$

a er en parameter som **ikke** forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

- γ -reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ -reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ - og δ -reglene er derfor **veldefinerte** i den forstand at alle sekvenser forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK)

Slutningsreglene i førsteordens LK er α - og β -reglene fra utsagnslogisk LK **og** γ - og δ -reglene.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene **slutninger** ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} L\forall \quad \left| \quad \frac{Pa, \forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x (Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} L\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles **premisser**.
- Sekventen *under* streken kalles **konklusjon**.
- Teksten til høyre for streken er regelens **navn**.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles **hovedformel**.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles **aktive formler**.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles **ekstraformler**.

Utleddninger

- **Ett-premissregler:** α -, γ - og δ -reglene.
- **To-premissregler:** β -reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i \mathcal{L} , er en **LK-utledning**.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

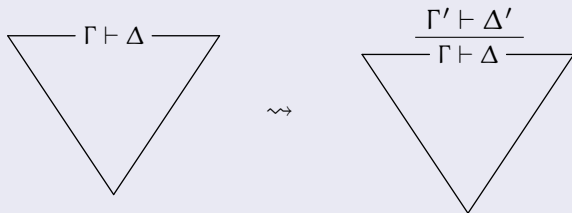
Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Merk: språket \mathcal{L}^{par} brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ -reglene.

Utleddninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

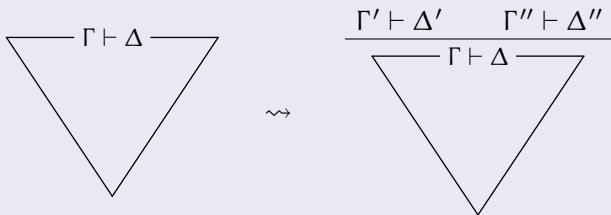
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en **LK-utledning**.



Utleddninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en **LK-utledning**.



Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **LK-bevisbar** hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.