INF3170 – Logikk

Forelesning 8: Mer sekventkalkyle og sunnhet

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

6. april 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-06 14:24)

Fortsettelse

Fortsettelse

Eksempler

Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

Eksempel 1

$$\forall x P x \vdash \forall x P x$$

Eksempel 1

$$\forall x Px \;\vdash\; \forall x Px$$

Eksempel 1

$$\frac{\forall x Px \;\vdash\; Pa}{\forall x Px \;\vdash\; \forall x Px}$$

Eksempel 1

$$\frac{\forall x Px \;\vdash\; Pa}{\forall x Px \;\vdash\; \forall x Px}$$

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pa \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

Eksempel 1

$$\cfrac{\cfrac{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\cfrac{\forall x Px \vdash Pa}{\forall x Px \vdash \forall x Px}}$$

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\dfrac{\forall x Px \vdash Pa}{\forall x Px \vdash \forall x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
    - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
  - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 2

$$\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px$$

Eksempel 2

$$\forall x Px \ \vdash \ \exists x Px$$

Eksempel 2

$$\frac{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px, Po}{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px}$$

Eksempel 2

$$\frac{\forall x P x \;\vdash\; \exists x P x, Po}{\forall x P x \;\vdash\; \exists x P x}$$

Eksempel 2

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x Px, Po \;\vdash\; \exists x Px, Po}}{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px, Po}}{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.

Eksempel 2

$$\cfrac{\cfrac{\times}{\forall x Px, Po \;\vdash\; \exists x Px, Po}}{\cfrac{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px, Po}{\forall x Px \;\vdash\; \exists x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\dfrac{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
    - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
    - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
    - Domenet må bestå av minst ett element e.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\dfrac{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $P\bar{e}$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $\exists x Px$ sann.

Eksempel 2

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $P\bar{e}$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $\exists x Px$ sann.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 3

$$\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx$$

Eksempel 3

$$\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx$$

Eksempel 3

$$\frac{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \qquad\qquad \forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ \forall x Px \qquad\qquad \forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; P{\color{red}a}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px} \qquad \forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Pa}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px} \qquad \forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \;\vdash\; Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \;\vdash\; \forall x Px} \qquad \forall x(Px \wedge Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}{\forall x(Px \wedge Qx) \;\vdash\; \forall x Px \wedge \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \ \vdash \ Pa}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ \forall x Px} \qquad \forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \;\vdash\; Pa}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px} \qquad \forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px} \qquad \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Qx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px \wedge \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px} \qquad \forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \ \vdash \ Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \ \vdash \ Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \ \vdash \ Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \ \vdash \ \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\forall x(Px \wedge Qx) \ \vdash \ Qa}{\forall x(Px \wedge Qx) \ \vdash \ \forall x Qx}
$$

$$
\forall x(Px \wedge Qx) \ \vdash \ \forall x Px \wedge \forall x Qx
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Qa}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}
$$
$$
\overline{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Qa}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\quad
\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
$$
$$
\overline{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
$$

$$
\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\times}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}
    }{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa}
  }{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}
  }{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px}
  \quad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\times}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}
    }{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa}
  }{\dfrac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Qx}}
}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px \wedge \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
$$
$$
\overline{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:

Eksempel 3

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}\times \\ \forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa\end{array}
}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}\times \\ \forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa\end{array}
}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
    - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.

Eksempel 3

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.

Eksempel 3

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \ \vdash\ Pa\end{array}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \ \vdash\ Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash\ Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash\ \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \ \vdash\ Qa\end{array}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \ \vdash\ Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash\ Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash\ \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash\ \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.

Eksempel 3

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
  - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
$$
$$
\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
  - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
  - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall x Px$ og $\forall x Qx$ sanne.

Eksempel 3

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}
    }{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}
  }{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\quad
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}
    }{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}
  }{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
$$
$$
\overline{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
  - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
  - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall x Px$ og $\forall x Qx$ sanne.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 4

$$\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$$

Eksempel 4

$$\exists x \forall y Lyx \ \vdash \ \forall x \exists y Lxy$$

Eksempel 4

$$\frac{\forall y L y a \ \vdash\ \forall x \exists y L x y}{\exists x \forall y L y x \ \vdash\ \forall x \exists y L x y}$$

Eksempel 4

$$\frac{\forall y Lya \;\vdash\; \forall x \exists y Lxy}{\exists x \forall y Lyx \;\vdash\; \forall x \exists y Lxy}$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\forall y L y a \ \vdash \ \exists y L \textcolor{red}{b} y}{\forall y L y a \ \vdash \ \forall x \exists y L x y}}{\exists x \forall y L y x \ \vdash \ \forall x \exists y L x y}$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

Eksempel 4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}
$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

Eksempel 4

$$
\begin{array}{c}
\times \\
\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby \\
\hline
\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby \\
\hline
\forall y Lya \vdash \exists y Lby \\
\hline
\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy \\
\hline
\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy
\end{array}
$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

$$\dfrac{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.

Eksempel 4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times \\ \forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby\end{array}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}
$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}$$
$$\overline{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x \exists y Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x \exists y Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\exists y L\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y L y a, \color{red}{Lba} \vdash \color{red}{Lba}, \exists y L b y}}{\forall y L y a, Lba \vdash \exists y L b y}}{\forall y L y a \vdash \exists y L b y}}{\forall y L y a \vdash \forall x \exists y L x y}}{\exists x \forall y L y x \vdash \forall x \exists y L x y}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y L y x \vdash \forall x \exists y L x y$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y L y x$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall y L y \bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x \exists y L x y$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\exists y L \bar{b} y$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - Vi har at $L \bar{b} \bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall y L y \bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby\end{array}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x \exists y Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\exists y L\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - “Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker.”

Eksempel 4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y L y a, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y L y a, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}
$$
$$
\overline{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}
$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x \exists y Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\exists y L\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - "Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker."
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 5

$$\forall x \exists y Lxy \ \vdash \ \exists x \forall y Lyx$$

Eksempel 5

$$\forall x \exists y Lxy \;\vdash\; \exists x \forall y Lyx$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \;\vdash\; \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy \;\vdash\; \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \;\vdash\; \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \;\vdash\; \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \;\vdash\; \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}
$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, \exists y L\color{red}{b}\color{black}{y}, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}
$$

Eksempel 5

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}
$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$
\begin{array}{c}
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Ly\textcolor{red}{c}, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx
\end{array}
$$

Eksempel 5

$$
\begin{array}{c}
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx \\ \hline
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\ \hline
\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\ \hline
\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\ \hline
\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx \\ \hline
\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx \\ \hline
\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx \\ \hline
\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx
\end{array}
$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x\exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, \exists x\forall y Lyx}}{\forall x\exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x\forall y Lyx}}{\forall x\exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x\forall y Lyx}}{\forall x\exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x\forall y Lyx}}{\forall x\exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x\forall y Lyx}}{\forall x\exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x\forall y Lyx}}{\forall x\exists y Lxy, Loa \vdash \exists x\forall y Lyx}}{\forall x\exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x\forall y Lyx}}{\forall x\exists y Lxy \vdash \exists x\forall y Lyx}
$$

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
    - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
    - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
    - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{b}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{a}\bar{b}$.

Eksempel 6

$$\vdash \ \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)$$

Eksempel 6

$$\vdash \ \exists x(Px \to \forall x Px)$$

Eksempel 6

$$\frac{\vdash \; P\mathrm{o} \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}{\vdash \; \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\frac{\vdash \; Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{\vdash \; \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$
\begin{array}{c}
Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)
\end{array}
$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Po \vdash Pa, Pa \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{\vdash Po \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$
\begin{array}{c}
Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px) \\
\hline
Po \vdash Pa, Pa \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px) \\
\hline
Po \vdash Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px) \\
\hline
Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px) \\
\hline
\vdash Po \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px) \\
\hline
\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)
\end{array}
$$

Eksempel 6

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\dfrac{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}}
$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}$$
$$\overline{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.

Eksempel 6

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}
$$
$$
\overline{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}
$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."
- Dette er ikke den samme påstanden som:
  "Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball."

Eksempel 6

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, Pa \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{\dfrac{\vdash Po \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}
$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)$ er bevisbar.
- “Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball.”
- Dette er ikke den samme påstanden som:
  “Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball.”
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.

Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

Fortsettelse

Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

- Overblikk
- Antakelser om førsteordens språk
- Reglene bevarer falsifiserbarhet
- Alle aksiomer er gyldige
- Sunnhetsbeviset

Overblikk

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært ukorrekt eller usunn...

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært ukorrekt eller usunn. . .

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært ukorrekt eller usunn...

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Antakelser om førsteordens språk

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller.
- Når vi har vist at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig i alle $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller, så må $\Gamma \vdash \Delta$ også være gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller, siden $\Gamma \vdash \Delta$ kun består av $\mathcal{L}$-formler.

Strukturen i beviset for sunnhet

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.

Lemma

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.

Lemma

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi har vist at α- og β-reglene har egenskapen.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.

Lemma

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi har vist at α- og β-reglene har egenskapen.
- Gjenstår å vise at γ- og δ-reglene har egenskapen.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall$$

t er en lukket term

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \,\mathsf{L}\forall \qquad \text{t er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.

Bevis for at L$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \text{t er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

Bevis for at $\mathsf{L}\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \;\vdash\; \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \;\vdash\; \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at L$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e).

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Da vil $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Da vil $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Oppgave: bevis lemmaet. Hint: induksjon på φ.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

Bevis for at $\mathsf{L}\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta}\,\mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \text{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
    - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
    - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elemenet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - Siden a og $\bar{d}$ må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

Et eksempel

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\exists x Px \;\vdash\; Pa$$

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\exists x Px \ \vdash \ Pa$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1,2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\exists x Px \;\vdash\; Pa$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\exists x Px \;\vdash\; Pa$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.

  $\mathcal{M} \not\models Pa$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \ \vdash \ Pa}{\exists x Px \ \vdash \ Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.

  $\mathcal{M} \not\models Pa$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \;\vdash\; Pa}{\exists x Px \;\vdash\; Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.

  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \ \vdash \ Pa}{\exists x Px \ \vdash \ Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\overline{2}$.

  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \ \vdash \ Pa}{\exists x Px \ \vdash \ Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.

  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.
- Da vil $\mathcal{M}'$ falsifisere premisset.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi} \, \mathsf{R}\exists \qquad \text{t er en lukket term}$$

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi} \, \mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x \varphi, \Delta$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} \, \mathsf{R}\exists \qquad \text{t er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi} \ \mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x \varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x \varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi} \text{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi} \ \mathsf{R}\exists \qquad \text{t er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi} \text{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi} \ \mathsf{R}\exists \qquad \text{t er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e).

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi} \mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x \varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x \varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x \varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x \varphi} \text{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\,\mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x \varphi} \text{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} \text{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} \text{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} \text{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x \varphi} \text{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x \varphi} \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - Siden a og $\bar{d}$ må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \not\models \varphi[a/x]$.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK-utledning π er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK-utledning π er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK-utledning π er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK-utledning π er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: ettpremiss- og topremissutvidelse.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK-utledning π er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: ettpremiss- og topremissutvidelse.
- Begge bruker lemmaet om falsifiserbarhetsbevaring (oppover).

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Alle aksiomer er gyldige

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$

slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leqslant i \leqslant n$.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$

  slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(s_1, \ldots, s_n)$.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$

  slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(s_1, \ldots, s_n)$.
- Dermed oppfylles en formel i succedenten, $P(t_1, \ldots, t_n)$.

Sunnhetsbeviset

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Bevis.

$\square$

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.

□

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.

$\square$

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.

□

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.

$\square$

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.

$\square$

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.

$\square$

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.
- Da må $\Gamma \vdash \Delta$ være gyldig.

$\square$