INF3170 – Forelesning 8

Mer sekventkalkyle og sunnhet

Roger Antonsen - 6. april 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-06 14:24)

Innhold

Fortsettelse

Eksempler

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
  - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $P\bar{e}$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $\exists x Px$ sann.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 3

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \;\vdash\; Pa\end{array}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \;\vdash\; Qa\end{array}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
  - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
  - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall x Px$ og $\forall x Qx$ sanne.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \forall y Lya, Lba \;\vdash\; Lba, \exists y Lby\end{array}}{\forall y Lya, Lba \;\vdash\; \exists y Lby}}{\forall y Lya \;\vdash\; \exists y Lby}}{\forall y Lya \;\vdash\; \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \;\vdash\; \forall x \exists y Lxy}
$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x \exists y Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\exists y L\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - "Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker."
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 5

$$
\begin{array}{rcl}
 & \vdots & \\
{\color{gray}\forall x\exists y Lxy}, Lbc, Loa & \vdash & Lba, Ldc, {\color{gray}\exists x\forall y Lyx} \\ \hline
{\color{gray}\forall x\exists y Lxy}, Lbc, Loa & \vdash & Lba, \forall y Lyc, {\color{gray}\exists x\forall y Lyx} \\ \hline
{\color{gray}\forall x\exists y Lxy}, Lbc, Loa & \vdash & Lba, \exists x\forall y Lyx{\color{gray}\exists x\forall y Lyx} \\ \hline
{\color{gray}\forall x\exists y Lxy}, \exists y Lby, Loa & \vdash & Lba, {\color{gray}\exists x\forall y Lyx} \\ \hline
{\color{gray}\forall x\exists y Lxy}\forall x\exists y Lxy, Loa & \vdash & Lba, {\color{gray}\exists x\forall y Lyx} \\ \hline
{\color{gray}\forall x\exists y Lxy}, Loa & \vdash & \forall y Lya, {\color{gray}\exists x\forall y Lyx} \\ \hline
{\color{gray}\forall x\exists y Lxy}, Loa & \vdash & \exists x\forall y Lyx \\ \hline
{\color{gray}\forall x\exists y Lxy}, \exists y Loy & \vdash & \exists x\forall y Lyx \\ \hline
\forall x\exists y Lxy & \vdash & \exists x\forall y Lyx
\end{array}
$$

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x\exists y Lxy \vdash \exists x\forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA,** la $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x\exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x\forall y Lyx$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{b}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{a}\bar{b}$.

Eksempel 6

$$
\begin{array}{rcl}
\times & & \\
Po, Pa & \vdash & \forall x Px, Pa, {\color{gray}\exists x(Px \to \forall x Px)} \\ \hline
Po & \vdash & Pa, Pa \to \forall x Px, {\color{gray}\exists x(Px \to \forall x Px)} \\ \hline
Po & \vdash & Pa, \exists x(Px \to \forall x Px){\color{gray}\exists x(Px \to \forall x Px)} \\ \hline
Po & \vdash & \forall x Px, {\color{gray}\exists x(Px \to \forall x Px)} \\ \hline
 & \vdash & Po \to \forall x Px, {\color{gray}\exists x(Px \to \forall x Px)} \\ \hline
 & \vdash & \exists x(Px \to \forall x Px)
\end{array}
$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."
- Dette er ikke den samme påstanden som: "Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball."
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.

Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.

- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært *ukorrekt* eller *usunn*...

Definisjon (Sunnhet).
En sekventkalkyle er *sunn* hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.

Teorem (Sunnhet).
Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller.
- Når vi har vist at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig i alle $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller, så må $\Gamma \vdash \Delta$ også være gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller, siden $\Gamma \vdash \Delta$ kun består av $\mathcal{L}$-formler.

Strukturen i beviset for sunnhet
Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon.
En LK-regel θ er *falsifiserbarhetsbevarende* (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.

Lemma.
Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi har vist at α- og β-reglene har egenskapen.
- Gjenstår å vise at γ- og δ-reglene har egenskapen.

Bevis for at L$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.(Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$. (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.
- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma.
La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Da vil $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Oppgave: bevis lemmaet. Hint: induksjon på φ.

Bevis for at L$\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists \qquad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan *ikke* uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elemenet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - Siden a og $\bar{d}$ må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \ \vdash \ Pa}{\exists x Px \ \vdash \ Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.

  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.
- Da vil $\mathcal{M}'$ falsifisere premisset.

Bevis for at R$\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi}\,\mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.(Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$. (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x\varphi}\,\mathsf{R}\forall \qquad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x\varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan *ikke* uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elemenet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:

- Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Siden a og $\bar{d}$ må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \not\models \varphi[a/x]$.

Lemma.
Hvis rotsekventen i en LK-utledning π er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: ettpremiss- og topremissutvidelse.
- Begge bruker lemmaet om falsifiserbarhetsbevaring (oppover).

Alle aksiomer er gyldige

Lemma.
Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(s_1, \ldots, s_n)$.
- Dermed oppfylles en formel i succedenten, $P(t_1, \ldots, t_n)$.

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet).
Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.

- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.
- Da må $\Gamma \vdash \Delta$ være gyldig.