

INF3170 – Logikk

Forelesning 8: Mer sekventkalkyle og sunnhet

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

6. april 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-06 14:24)



Fortsettelse

Fortsettelse

Eksempler

Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

Eksempel 1

$$\frac{\frac{\times}{\forall xPx, Pa \vdash Pa}}{\forall xPx \vdash Pa}}{\forall xPx \vdash \forall xPx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \forall xPx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
 - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 2

$$\frac{\frac{\frac{\times}{\forall xPx, Po \vdash \exists xPx, Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall xPx$ sann.
 - Domenet må bestå av minst ett element e .
 - Siden \mathcal{M} gjør $\forall xPx$ sann, må \mathcal{M} gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
 - Siden \mathcal{M} gjør $P\bar{e}$ sann, må \mathcal{M} gjøre formelen $\exists xPx$ sann.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\times}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa} \quad \frac{\frac{\frac{\times}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall x(Px \wedge Qx)$ sann.
 - Velg et vilkårlig element e i domenet til \mathcal{M} .
 - Ved antakelsen må \mathcal{M} gjøre $P\bar{e} \wedge Q\bar{e}$ sann.
 - Da må \mathcal{M} gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
 - Siden e var vilkårlig valgt, må \mathcal{M} også gjøre $\forall xPx$ og $\forall xQx$ sanne.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 4

$$\frac{\frac{\frac{\times}{\forall yLy a, Lba \vdash Lba, \exists yLby}}{\forall yLy a, Lba \vdash \exists yLby}}{\forall yLy a \vdash \exists yLby}}{\forall yLy a \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
 - Da fins det et element a slik at $\forall yLy\bar{a}$ er sann i \mathcal{M} .
 - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i \mathcal{M} , velg et vilkårlig element b .
 - Det er nok å vise at $\exists yL\bar{b}y$ er sann i \mathcal{M} .
 - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i \mathcal{M} , siden $\forall yLy\bar{a}$ er sann i \mathcal{M} .
 - “Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker.”
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x\exists yLxy, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, \exists x\forall yLyx}}{\forall x\exists yLxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall yLyc, \exists x\forall yLyx}}{\forall x\exists yLxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x\forall yLyx}}{\forall x\exists yLxy, \exists yLby, Loa \vdash Lba, \exists x\forall yLyx}}{\forall x\exists yLxy, \forall x\exists yLxy, Loa \vdash Lba, \exists x\forall yLyx}}{\forall x\exists yLxy, Loa \vdash \forall yLy a, \exists x\forall yLyx}}{\forall x\exists yLxy, Loa \vdash \exists x\forall yLyx}}{\forall x\exists yLxy, \exists yLoy \vdash \exists x\forall yLyx}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx}}$$

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- “Alle liker seg selv og ingen andre.”
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.
 - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.
 - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{b}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{a}\bar{b}$.

Eksempel 6

$$\begin{array}{c} \times \\ \hline \text{Po, Pa} \vdash \forall x Px, \text{Pa}, \exists x (Px \rightarrow \forall x Px) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \text{Pa} \rightarrow \forall x Px, \exists x (Px \rightarrow \forall x Px) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \exists x (Px \rightarrow \forall x Px) \\ \hline \text{Po} \vdash \forall x Px, \exists x (Px \rightarrow \forall x Px) \\ \hline \vdash \text{Po} \rightarrow \forall x Px, \exists x (Px \rightarrow \forall x Px) \\ \hline \vdash \exists x (Px \rightarrow \forall x Px) \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x (Px \rightarrow \forall x Px)$ er bevisbar.
- “Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball.”
- Dette er ikke den samme påstanden som:
“Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball.”
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.

Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

Fortsettelse

Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

- Overblikk
- Antakelser om førsteordens språk
- Reglene bevarer falsifiserbarhet
- Alle aksiomer er gyldige
- Sunnhetsbeviset

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært **ukorrekt** eller **usunn**...

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er **sunn** hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk \mathcal{L} er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede \mathcal{L} -formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle \mathcal{L} -modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket \mathcal{L}^{par} .
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er \mathcal{L}^{par} -modeller.
- Når vi har vist at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig i alle \mathcal{L}^{par} -modeller, så må $\Gamma \vdash \Delta$ også være gyldig i alle \mathcal{L} -modeller, siden $\Gamma \vdash \Delta$ kun består av \mathcal{L} -formler.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhets-teoremet ved hjelp av lemmaene.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK-regel θ er **falsifiserbarhetsbevarende** (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ -slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.

Lemma

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi har vist at α - og β -reglene har egenskapen.
- Gjenstår å vise at γ - og δ -reglene har egenskapen.

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av \mathcal{M} .
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
(Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
(Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og \bar{e} må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La \mathcal{M} være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Da vil $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Oppgave: bevis lemmaet. Hint: induksjon på φ .

Bevis for at $L\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} L\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan **ikke** uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:
 - \mathcal{M}' skal være helt lik \mathcal{M} bortsett fra når det gjelder tolkningen av a .
 - Parameteren a skal tolkes som elementet d , dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at \mathcal{M}' falsifiserer premisset:
 - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må \mathcal{M}' og \mathcal{M} tolke formlene i Γ og Δ likt. \mathcal{M}' gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
 - Siden a og \bar{d} må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

Et eksempel

- Anta at \mathcal{M} er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \vdash Pa}{\exists xPx \vdash Pa}$$

- Vi har at \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - $\mathcal{M} \models \exists xPx$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.
 - $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, \mathcal{M} falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell \mathcal{M}' som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.
- Da vil \mathcal{M}' falsifisere premisset.

Bevis for at $R\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av \mathcal{M} .
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
(Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
(Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og \bar{e} må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$.

Bevis for at $R\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi} R\forall \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x\varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan **ikke** uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:
 - \mathcal{M}' skal være helt lik \mathcal{M} bortsett fra når det gjelder tolkningen av a .
 - Parameteren a skal tolkes som elementet d , dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at \mathcal{M}' falsifiserer premisset:
 - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må \mathcal{M}' og \mathcal{M} tolke formlene i Γ og Δ likt. \mathcal{M}' gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
 - Siden a og \bar{d} må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \not\models \varphi[a/x]$.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK-utledning π er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π .
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: etpremiss- og topremissutvidelse.
- Begge bruker lemmaet om falsifiserbarhetsbevaring (oppover).

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leq i \leq n$.

- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(s_1, \dots, s_n)$.
- Dermed oppfylles en formel i succedenten, $P(t_1, \dots, t_n)$.

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.
- Da må $\Gamma \vdash \Delta$ være gyldig.

□