

INF3170 – Forelesning 9

Mer sekventkalkyle og kompletthet

Roger Antonsen - 13. april 2010

(Sist oppdatert: 2010-04-13 12:04)

Innhold

Kompletthet av LK	1
Overblikk	1
Strategier	2
Herbranduniverset	3
Rettferdige strategier	4
Königs lemma	5
Bevis for modelleksistensteoremet	5
Eksempler på eksistens av motmodell	8

Kompletthet av LK

Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekventer.
- Det er ingen “hull” i mengden av LK-bevisbare formler.
- Det er to måter å forstå “fra φ følger ψ ” på:
 1. Semantisk: $\varphi \models \psi$, hvis φ er sann, så er ψ sann.
 2. Syntaktisk: $\varphi \vdash \psi$, det fins et bevis for sekventen $\varphi \vdash \psi$ / fra antakelsen φ , så kan ψ bevises.
- Med sunnhet og kompletthet, så blir disse ekvivalente.

Kurt Gödel (1906-1978)



Kurt Gödel (1906-1978)

- En av de mest betydningsfulle logikere noensinne.
- Har hatt enorm innflytelse på logikk, matematikk og filosofi.
- Det er han som først viste kompletthet av førsteordens logikk (1929).
- Er mest kjent for ufullstendighetsteoreme (1931) og at kontinuumshypotesen er konsistent med mengdelæren (1937).

Teorem (Kompletthet).

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens).

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Dvs. det finnes en modell som gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.

Merk at vi uansett går fra en universell påstand (“for alle modeller”) til en eksistensiell påstand (“det fins et bevis”).

Strategier

- Hvis en formel eller sekvent er gyldig, kan vi ha en *garanti* for at vi finner et bevis ved å begynne med en rotsekvent og anvende LK-reglene gjentatte ganger?
- For å gjøre dette litt mer presist, innfører vi begrepet *strategi*.

Definisjon (Strategi).

En *strategi* for LK er en angivelse av hvordan LK-reglene systematisk skal anvendes på formler i LK-utledninger.

- Med vilje litt vagt. Mye kan være en strategi.
- Vi er interessert i strategier som garanterer at vi får et bevis til slutt hvis det er slik at bevis fins. La oss kalle slike strategier for “gode”.

Definisjon (Formeltype).

i2- $\dot{\iota}$ La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av *type* θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ -slutning.

Eksempel.

i4- $\dot{\iota}$

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

- $Pa \wedge Pb$ er en α -formel

- $Qa \vee Qb$ er en β -formel
- $\exists xPx$ er en γ -formel
- $\forall xPx$ er en δ -formel

En enkel strategi

1. Anvend α -regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α . Gå til 2.
2. Anvend β -regler så mange ganger som mulig.

$$\frac{\frac{\frac{\times}{P, Q \vdash P} \quad \frac{\times}{P, Q \vdash Q}}{P, Q \vdash P \wedge Q} 2}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q} 1$$

- Denne strategien er ikke "god". Det kan hende at 1 må anvendes etter at 2 er anvendt.

En "god" strategi for utsagnslogikk.

1. Anvend α -regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
2. Anvend β -regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
3. Hvis det er mulig å anvende en α -regel, gå til 1.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\times}{P, Q \vdash P, R, R} \quad \frac{\times}{P, Q \vdash Q, R, R}}{P, Q \vdash P \wedge Q, R, R} 2}{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R} 1}{\frac{\frac{\times}{R, P, Q \vdash R, R}}{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R} 2}{\frac{\frac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \rightarrow R} 1}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \rightarrow R, Q \rightarrow R} 1}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} 1$$

- Hva skal til for at en strategi skal være "god"?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\frac{\frac{\frac{Pffa, Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Qfa \wedge Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn "alle termer" for γ -formler.

$$\frac{\frac{\frac{Pgga, Pga, Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}{Pga, Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}}{Pa, \forall xPx \vdash Qga, Pfffb}}{\forall xPx \vdash Qga, Pfffb}$$

- Vi må kunne snakke om "alle termer" på en presis måte. . .

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset).

La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, *Herbranduniverset til T* , den minste mengden slik at:

- $\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T . Hvis det ikke er noen konstanter i T , så er en parameter o fra par (kalt en dummykonstant) med i $\mathcal{H}(T)$.
- Hvis f er et funksjonssymbol i T med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer i $\mathcal{H}(T)$, så er $f(t_1, \dots, t_n)$ i $\mathcal{H}(T)$.

Herbranduniverset til en mengde formler er Herbranduniverset til mengden av termer som forekommer i formlene. Herbranduniverset til en gren er Herbranduniverset til mengden av formler som forekommer i grenen.

- Intuitivt, så er Herbranduniverset til T mengden av alle *lukkede* termer som kan genereres fra termer i T .

Eksempel.

La $T = \{f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{o, fo, ffo, fffo, \dots\}$$

Eksempel.

La $T = \{a, f(x)\}$. Da er Herbranduniverset til T mengden

$$\{a, fa, ffa, fffa, \dots\}$$

Eksempel.

La $F = \{\forall x H(f(g(x)))\}$. Da er Herbranduniverset til F mengden

$$\{o, fo, go, fgo, gfo, ffo, ggo, \dots\}$$

Rettfærdige strategier

- Enhver rettfærdig strategi må gjøre at
 - alle formler blir analysert før eller senere, og
 - alle γ -formler blir instansiert med alle termer før eller senere.

- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
 1. Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,
 2. eller så fins en åpen gren som vi kan lage en motmodell fra.
- For at dette skal gi mening må vi godta at utledninger kan være uendelig store, dvs. ha uendelig lange grener.
- Vi kan tenke at vi går til *grensen* i konstruksjonen av en utledning, enten ved at ingen regler lenger kan anvendes eller ved å fortsette med regelanvendelser i det uendelige. Vi kaller slike for *grenseutledninger*.
- Vi inkluderer altså uendelige trær når vi snakker om grenseutledninger.
- Merk: hvis alle grener i en utledning kan lukkes, så er utledningen endelig.
- Vi skal nå abstrahere over alle “gode” strategier.

Definisjon (Rettferdig strategi).

En strategi er *rettferdig* hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

1. Hvis φ er en α -, β - eller δ -formel i en gren som ikke er lukket, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.
2. Hvis φ er en γ -formel på formen $Qx\psi$ i en gren som ikke er lukket, så er $\psi[t/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.

Königs lemma

Lemma (Königs lemma).

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis.

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T . Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig. (Ellers ville T ha vært et endelig tre.) La u_1 være rotnoden i et slikt deltre. Hvis grenen u_0, u_1, \dots, u_n er generert, så finner man neste node u_{n+1} ved samme type resonnering. Denne prosessen gir en uendelig gren.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- La π være en utledning (muligens uendelig) av $\Gamma \vdash \Delta$ som fremkommer ved å følge en rettferdig strategi. “En maksimal utledning”.
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må det finnes minst en gren som ikke er lukket. (Her bruker vi Königs lemma.) La G være en slik gren. La

G^\top være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G ,

G^\perp være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G , og

A være mengden av alle atomære formler som forekommer i G^\top .

- Vi konstruerer nå en motmodell \mathcal{M} for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til \mathcal{M} være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).
- La $a^{\mathcal{M}} = a$ for alle konstantsymboler a .
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n , la $f^{\mathcal{M}}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$.
 - Da vil $t^{\mathcal{M}} = t$ for alle lukkede termer t .
 - Alle termer tolkes som seg selv.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n , la $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ hvis og bare hvis $R(t_1, \dots, t_n) \in A$.
- En slik modell kalles ofte for en *Herbrandmodell* eller en *termmodell*.
- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket \mathcal{L}^{par}) at modellen \mathcal{M} gjør *alle* formler i G^\top sanne og alle formler i G^\perp usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:

Hvis $\varphi \in G^\top$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.

Hvis $\varphi \in G^\perp$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^\top .

- Da må $R(t_1, \dots, t_n) \in A$ og $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ ved konstruksjon.
- Da må $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$.

Basissteg 2: φ er en atomær formel $R(t_1, \dots, t_n)$ i G^\perp .

- Siden G ikke er lukket, må $R(t_1, \dots, t_n) \notin A$ og $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \notin R^{\mathcal{M}}$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models R(t_1, \dots, t_n)$.

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \wedge \psi \in G^\top$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi \wedge \psi$ vært hovedformel i en slutning i grenen G .
- Da vil $\varphi \in G^\top$ og $\psi \in G^\top$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet har vi $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$.

Formler med kvantorer gjenstår.

Anta at $\exists x\varphi \in G^\top$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\exists x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.

- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\top$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $a^{\mathcal{M}} = a$, så vil også $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$.

Anta at $\exists x\varphi \in G^\perp$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.
- Vi har dermed for alle termer t i Herbranduniverset til grenen følgende
 - $\varphi[t/x] \in G^\perp$
 - $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
 - $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{t}/x]$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)
- Husk at domenet til \mathcal{M} er Herbranduniverset til grenen.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$.

Anta at $\forall x\varphi \in G^\perp$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\forall x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^\perp$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $a^{\mathcal{M}} = a$, så vil også $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{a}/x]$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$.

Anta at $\forall x\varphi \in G^\top$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.
- Vi har dermed for alle termer t i Herbranduniverset til grenen følgende
 - $\varphi[t/x] \in G^\top$
 - $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
 - $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{t}/x]$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)
- Husk at domenet til \mathcal{M} er Herbranduniverset til grenen.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$.

Noen kommentarer

- Vi kan se på konstruksjonen av en utledning som en tilnærming/approksimasjon til en motmodell for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Jo flere ganger vi anvender regler (ved å følge en rettferdig strategi), jo nærmere kommer vi en eventuell motmodell.
- For å lage en motmodell på denne måten, kan det være nødvendig å anvende reglene uendelig mange ganger.
- Ofte fins det endelige motmodeller der hvor denne metoden gir en uendelig motmodell. Å finne endelige motmodeller der hvor det fins er ikke lett. Dette er noe det forskes på.
- Idéen i kompletthetsbeviset er viktig. Konstruksjonen av modeller fra noe rent syntaktisk. Et filosofisk spørsmål: Er det egentlig et skille mellom syntaks og semantikk?

Eksempler på eksistens av motmodell

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa \\
 \hline
 \varphi, Pa \rightarrow Qa, Pa \vdash \forall x Qx \\
 \hline
 \underbrace{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \vdash \forall x Qx}_{\varphi}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 G \\
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pb \rightarrow Qb, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \times \\
 Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash Qb \\
 \hline
 Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

- Herbranduniverset til grenen G, og domenet til \mathcal{M} , er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^\top$ vil $a \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.
- Siden $Qa \in G^\top$ vil $a \in Q^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Qa$ og $\mathcal{M} \models Pa \rightarrow Qa$.
- Siden $Qb \in G^\perp$ vil $b \notin Q^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Qb$ og $\mathcal{M} \not\models \forall x Qx$.
- Siden $Pb \in G^\perp$ vil $b \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$ og $\mathcal{M} \models Pb \rightarrow Qb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Px \rightarrow Qx)$.
- \mathcal{M} oppfyller alle formlene i G^\top og falsifiserer alle formlene i G^\perp .

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Paa \rightarrow Pab, Paa \vdash Pab \\
 \hline
 \varphi, Paa \vdash Pab
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \times \\
 \varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba \\
 \hline
 \varphi, Pba \rightarrow Pbb, Pba \vdash Pab, Paa \\
 \hline
 \varphi, Pba \vdash Pab, Paa
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 G \\
 Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa \\
 \hline
 \varphi, Paa \rightarrow Pab, Pba \vdash Pab \\
 \hline
 \varphi, Pba \vdash Pab
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \times \\
 Pab, \varphi, Pba \vdash Pab \\
 \hline
 \varphi, Pba \vdash Pab
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\underbrace{\forall x(Pxa \rightarrow Pxb), Paa \vee Pba \vdash Pab}_{\varphi}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til \mathcal{M} - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^\perp$ vil $\langle a, b \rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^\top$ vil $\langle b, a \rangle \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^\perp$ vil $\langle a, a \rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \rightarrow Pab$.
- Siden $Pbb \in G^\top$ vil $\langle b, b \rangle \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pbb$ og $\mathcal{M} \models Pba \rightarrow Pbb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Pxa \rightarrow Pxb)$.
- \mathcal{M} oppfyller alle formlene i G^\top og falsifiserer alle formlene i G^\perp .