Øvingsoppgaver 1

INF3170 – Logikk – Våren 2010

Mengdelære

Husk at $\mathbb{N}$ er mengden av de naturlige tall (altså $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$), og at $\mathbb{Z}$ er mengden av heltall (altså $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$). La $d, n \in \mathbb{N}$. Vi sier at d *deler* n, og skriver $d \mid n$, hvis det finnes $m \in \mathbb{N}$ slik at $n = dm$.

Oppgave 1.
La $A = \{2, 3, 4\}$ og $B = \{6, 8, 10\}$. Vi definerer en binær relasjon R fra A til B som følger:

$$\langle x, y\rangle \in R \text{ hvis og bare hvis } x \mid y$$

a. Er $\langle 4, 6\rangle \in R$? Er $\langle 4, 8\rangle \in R$? Er $\langle 3, 8\rangle \in R$? Er $\langle 2, 10\rangle \in R$?
b. Skriv R som en mengde ordnede par.

Oppgave 2.
Vi definerer *kongruens modulo 2*-relasjonen K fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Z}$ slik:

$$\langle m, n\rangle \in K \text{ hvis og bare hvis } m - n \text{ er et partall}$$

a. Er $\langle 0, 0\rangle \in K$? Er $\langle 5, 2\rangle \in K$? Er $\langle 6, 6\rangle \in K$? Er $\langle -1, 7\rangle \in K$?
b. Vis at for alle partall $n \in \mathbb{Z}$ så er $\langle n, 0\rangle \in K$.

Oppgave 3.
Nedenfor listes åtte binære relasjoner over mengden $A = \{0, 1, 2, 3\}$. For hver relasjon, finn ut hvilke av egenskapene *refleksiv, symmetrisk* og *transitiv* den har. *Hint:* Det kan være lurt å tegne graphen til relasjonen som et hjelpemiddel.

a. $R_1 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$
b. $R_2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$
c. $R_3 = \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$
d. $R_4 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$
e. $R_5 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,2\rangle\}$
f. $R_6 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle\}$
g. $R_7 = \{\langle 0,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$
h. $R_8 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$

Oppgave 4.
La A være en ikke-tom mengde, og la $\mathcal{P}(A)$ være potensmengden til A, dvs. mengden av alle delmengder av A. Finn ut hvorvidt relasjonene nedenfor har egenskapene *refleksiv, symmetrisk* eller *transitiv*. Begrunn svaret ditt.

a. Delmengde-relasjonen D på $\mathcal{P}(A)$:

$$\langle X, Y\rangle \in D \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$

b. Ulikhets-relasjonen U på $\mathcal{P}(A)$:

$$\langle X, Y\rangle \in U \quad \Leftrightarrow \quad X \neq Y$$

c. Relativ komplement-relasjonen K på $\mathcal{P}(A)$:

$$\langle X, Y\rangle \in K \quad \Leftrightarrow \quad Y = A \setminus X$$

Utsagnslogikk

Oppgave 5.

Skriv opp fem utsagnslogiske formler som har mer enn tre utsagnslogiske konnektiver.

Oppgave 6.

Hvilke av de følgende uttrykkene er utsagnslogiske formler?

a. P
b. $(P$
c. $(((P \to Q) \vee (R \vee P) \wedge \neg Q)$
d. $(((P \to Q) \vee (R \vee P)) \wedge \neg Q)$
e. $((P \to Q)$
f. "parkeringsplassen er stengt"