

Øvingsoppgaver 3

INF3170 – Logikk – Våren 2010

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

Oppgave 1.

Gi sekventkalkylebevis for følgende sekventer:

- $\neg\neg P \vdash P$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$
- $P \vee (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$

Oppgave 2.

Vi minner om at en sekventkalkyleregul er *falsifikasjonsbevarende* (oppover) hvis minst ett av premissene er falsifiserbare hver gang konklusjonen er falsifiserbar. Vis at følgende LK-regler er falsifikasjonsbevarende: $L\neg$, RV , $R\rightarrow$, $L\wedge$ og $R\wedge$.

Oppgave 3.

Vi definerer de *strukturelle* LK-reglene som følger:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ LW} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{ RW}$$
$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ LC} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{ RC}$$
$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ Cut}$$

Reglene LW og RW kalles *tynningsregler* (fra engelsk “weakening”). Navnet er motivert fra å lese regelen ovenfra og ned. Da ser vi at sekventen tyngnes ved å legge til formler på henholdsvis venstre og høyre side av sekventtegnet. Reglene LC og RC kalles *kontraksjonsregler* (fra engelsk “contraction”). Lest ovenfra og ned ser vi at vi slår sammen to forekomster av en formel i premisset til én forekomst i konklusjonen. Regelen Cut kalles *snittregel*. Den fanger inn det å bruke lemmaer, eller hjelpesetninger, i matematiske bevis.

Legg merke til at både kontraksjonsreglene og snittregelen gjør at premissene blir mer komplekse enn konklusjonen. Hvis vi skal bruke disse formlene i automatisk bevissøk, så vil søke ikke terminere (med mindre vi lager strategier for hvordan vi bruker kontraksjon og snitt).

- Vis at de strukturelle reglene er falsifikasjonsbevarende oppover.
- Sekventkalkylen LK er *komplett* hvis enhver gyldig sekvent er bevisbar. Gjør deg opp noen tanker om hvorvidt vi trenger å ha med de strukturelle reglene for å få en komplett sekventkalkyle for utsagnslogikk.

Sekventkalkyle

Oppgave 4.

Lag en regel slik at LK blir usunn når denne regelen legges til.

Oppgave 5 (Induktiv definisjon av utledninger).

- Vi har definert mengden av LK-utledninger induktivt ved å begynne med rotsekventer og anvende reglene “nedenfra og opp”. Dette svarer til en *analytisk* måte å tenke på. (Ordet *analyse* betyr å dele opp/ta fra hverandre.)
 - En annen måte å definere mengden av utledninger på, er å starte med løvsekventer og anvende reglene “ovenfra og ned”. Dette svarer til en *syntetisk* måte å tenke på. (Ordet *syntetisk* betyr å sette sammen.)
1. Gi en induktiv definisjon av mengden av utledninger som svarer til den syntetiske måten å tenke på.
 2. Forklar hvordan vi kan definere mengden av *bevis* induktivt på denne måten.
 3. Gjør greie for hvordan sunnhetsbeviset går med denne definisjonen av utledninger.