

# Oppgavesett 1

18. januar 2011

## Oppgave 1

Les introduksjonskapitlene i van Dalen (læreboka) og Avigad (forelesningsnotatene til Jeremy Avigad, se lenke i “Beskjeder” på semestersida).

## Oppgave 2

Her følger noen oppvarmingsøvelser i mengdelære. Gjør disse om du ikke er sikker på at de begrepene vi gjennomgikk sitter som spikret eller om du er usikker på hvordan du skal føre bevisene (altså svarene til “vis at”-oppgavene). Den mengdelæren vi gjennomgikk 18.01.2011 er detaljert beskrevet i Roger Antonsens første forelesning fra i fjor, jeg har lenket til den under “Detaljert undervisningsplan”.

- Vis at den tomme mengde er inneholdt i alle mengder. Det vil si, gitt en vilkårlig mengde  $A$ , vis at  $\emptyset \subseteq A$ . Vis at den tomme mengden ikke er medlem av, altså ikke er element i, alle mengder. Det vil si, vis at det finnes en mengde  $A$  slik at  $\emptyset \notin A$ .
- Vis at hvis  $A \subseteq B$  og  $B \subseteq C$  så  $A \subseteq C$ .
- For en mengde  $A$  så er *potensmengden* til  $A$  mengden av alle delmengder av  $A$ . Vi skriver potensmengden til  $A$  som  $\mathcal{P}(A)$ . Definisjonen av potensmengden er altså: For alle mengder  $B$  så har vi at

$$B \in \mathcal{P}(A) \text{ hvis og bare hvis } B \subseteq A$$

Skriv ut potensmengden til mengden  $\{0, 1, 2\}$ . (Hint: Hvis du har fått med alt skal du ende opp med en mengde som har i alt åtte elementer.)

- Betrakt mengdene  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ er et partall}\}$  og  $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Er de like? Er den ene inneholdt i den andre?
- Beregn følgende snitt:

(i)  $\{0, 1, 2, 3\} \cap \{\emptyset, \{2\}, 1, \{0\}\}$

(ii)  $\{\{\emptyset\}\} \cap \{\{\{\emptyset\}\}\}$

## Spesialoppgave—Russels paradoks

Det ble nevnt i forelesningen at det strengt tatt ikke er legitimt å definere en mengde ved å gi en egenskap som beskriver en samling objekter. Derimot er det alltid legitimt å bruke mengdebyggeroperasjonen. Det vil si at hvis vi har gitt en mengde  $A$  så kan vi alltid danne mengden  $\{a \in A \mid a \text{ er } P\}$ , der  $P$  er en eller annen egenskap. Følgende oppgave viser hvorfor vi må ha denne restriksjonen. Anta at man alltid kan lage en mengde ved å ta samlingen av objekter som tilfredsstillter en eller annen egenskap  $P$ . Det vil si at  $\{a \mid a \text{ er } P\}$  er en mengde, uten at  $a$  trenger å være element av en gitt mengde  $A$ . Mengder er selv objekter som kan være elementer i mengder, så da er følgende en mengde:

$$R := \{ A \mid A \text{ er en mengde og } A \notin A \}$$

Vis at  $R$  er medlem av seg selv hvis og bare hvis  $R$  ikke er medlem av seg selv, altså at  $R \in R$  hvis og bare hvis  $R \notin R$ , slik at vi har en motsigelse.