# INF3170—Obligatorisk oppgave

Leveres fredag 13. mai 2011

## 1 Setningslogikk

1.1 Definer mengden av “babbelstrenger” induktivt som følger:

- “ba” er en babbelstreng
- hvis $s$ babbelstreng så er “ab” $\hat{}\, s$ også det
- hvis $s$ og $t$ er babbelstrenger så er $s \,\hat{}\, t$ også det

Vis ved induksjon at enhver babbelstreng har like mange $a$’er som $b$’er og at enhver babbelstreng slutter med en “a”. Er mengden av babbelstrenger fritt generert? (Begrunn.)

1.2 (Van Dalen oppgave 3 på side 14.) Vis at for alle formler $\theta$, $\psi$, and $\phi$, hvis $\phi$ er en delformel av $\psi$ og $\psi$ er en delformel av $\theta$, så er $\phi$ en delformel av $\theta$. (Hint: Delformel er definert på side 12 i van Dalen. Bruk induksjon på $\theta$ og vær nøye når du formulerer egenskapen til $\theta$.)

1.3 Bevis eller finn moteksempel til følgende:

a) For alle mengder av formler $\Gamma$, enhver formel $\varphi$ og enhver formel $\psi$, hvis $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$, så $\Gamma \models \varphi$ and $\Gamma \models \psi$.

b) For alle mengder av formler $\Gamma$, enhver formel $\varphi$ og enhver formel $\psi$, hvis $\Gamma \models \varphi \vee \psi$, så $\Gamma \models \varphi$ or $\Gamma \models \psi$.

c) $\{p_1 \wedge p_2, \neg p_2\} \models \neg p_1$

d) $\bot \models \varphi$ for any $\phi \in$ PROP.

e) $\varphi \models \top$ for any $\phi \in$ PROP.

1.4 (Van Dalen 1 s. 39.) Gi naturlig deduksjonsbevis for følgende utsagn:

a) $\varphi \to \varphi$

b) $\bot \to \varphi$

c) $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

d) $(\varphi \to \psi) \to \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

1.5 (Van Dalen 5 s. 55.) Vis ved naturlig deduksjon at

$$\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi))$$

1.6 a) (Van Dalen 1 s. 47.) Avgjør om følgende mengder er konsistente. Begrunn alle svar med enten en valuasjon som gjør alle utsagn i mengden sann eller med en utledning av $\perp$ fra premisser i mengden.

i) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0,\ p_1 \to (\neg p_1 \to p_2),\ p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$

ii) $\{p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to \neg p_0\}$

iii) $\{p_0 \to p_1,\ p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3,\ p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \ldots\}$

b) Hvilket teorem bruker vi for å konkludere fra at det finnes en valuasjon som gjør alle utsagn i mengden sann til at den er konsistent?

# 2 Førsteordens logikk

2.1 Gitt en signatur med et binært relasjonssymbol $<$ (og $=$). Formaliser følgende i strukturen som består av de naturlige tall med $<$ tolket som "mindre enn":

a) "$x$ er mindre eller lik $y$"

b) "$x$ er det minste tallet"

c) "det finnes intet minste tall"

d) "det finnes intet største tall"

e) "ethvert tall har en umiddelbar etterfølger" (altså et større tall uten noen i mellom)

f) "$x = 2$"

2.2 Betrakt følgende ekvivalens:

$$\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\exists x \varphi(x)) \wedge (\exists x \psi(x)))$$

Du kan anta at $\varphi$ og $\psi$ har $x$ som eneste frie variabel.

a) Vis at en retning i denne ekvivalensen er gyldig (altså sann i alle strukturer). Vær nøye, du kan bruke Lemma 2.4.5 i van Dalen.

b) Finn $\varphi$ og $\psi$ slik at den andre retningen ikke er gyldig, og bevis dette.

2.3 Gi naturlig deduksjonsbevis for følgende:

a) $\{\forall x \forall y \varphi(x, y)\} \vdash \forall x \varphi(x, x)$

b) $\vdash (\exists x(\varphi(x) \wedge \psi)) \leftrightarrow ((\exists x \varphi(x)) \wedge \psi)$, der $x$ ikke er fri i $\psi$

c) $\vdash \forall x \varphi(x) \to \neg \exists x \neg \varphi(x)$

2.4 Betrakt utsagnet $\exists x(\varphi(x) \to \forall x \varphi(x))$.

a) Argumenter kort for at utsagnet er gyldig.

b) Gi et naturlig deduksjonsbevis for utsagnet.

2.5 Vi har, som kjent, to formuleringer av kompletthetsteoremet:

> *Versjon A:* Hvis $\Gamma$ er en konsistent mengde setninger så har $\Gamma$ en modell.
>
> *Version B:* Hvis $\Gamma$ er en mengde setninger, $\varphi$ er en setning og $\Gamma \models \varphi$ så $\Gamma \vdash \varphi$.

Vis *direkte* at disse to versjonene er ekvivalente (Hint: For å vise at B impliserer A, la $\varphi$ være $\bot$.)

# 3 Aksiomer, teorier og modeller

En ekvivalensrelasjon på en mengde er en relasjon som refleksiv, symmetrisk og transitiv, i den forstand at alle objekter i mengden er ekvivalente med seg selv, hvis $a$ er ekvivalent med $b$ så er $b$ ekvivalent med $a$, for alle objekter $a, b$ i mengden, og hvis $a$ er ekvivalent med $b$ og $b$ er ekvivalent med $c$ så er $a$ ekvivalent med $c$, for alle objekter $a, b, c$ i mengden. La $\mathcal{L}$ være en signatur med ett relasjonssymbol med aritet to i tillegg til likhet:

$$\mathcal{L} = \langle G; -; - \rangle$$

Vi kan kalle en struktur for $\mathcal{L}$ en "graf". Følgende tre setninger aksiomatiserer klassen av grafer som er ekvivalensrelasjoner (vi bruker infiksnotasjon):

**AR** $\forall x(xGx)$

**AS** $\forall x, y(xGy \to yGx)$

**AT** $\forall x, y, z(xGy \land yGz \to xGy)$

3.1 Når man skal aksiomatisere en teori eller en klasse med strukturer ønsker man gjerne å ha så få aksiomer som mulig. Aksiomer kalles *uavhengige* (av hverandre) hvis intet aksiom er en konsekvens av de andre aksiomene. Vis at at AR, AS og AT er uavhengige (av hverandre). D.v.s. vis at

(a) $\mathrm{AR} \land \mathrm{AS} \nvdash \mathrm{AT}$

(b) $\mathrm{AR} \land \mathrm{AT} \nvdash \mathrm{AS}$

(c) $\mathrm{AS} \land \mathrm{AT} \nvdash \mathrm{AR}$

(du kan bruke kompletthetsteoremet).

3.2 Lag to strukturer, $\mathfrak{M}$ og $\mathfrak{N}$ slik at $\mathfrak{M} \models \mathrm{AR} \land \mathrm{AS} \land \mathrm{AT}$ og $\mathfrak{N} \models \mathrm{AR} \land \mathrm{AS} \land \mathrm{AT}$, og slik at $\mathfrak{M}$ og $\mathfrak{N}$ er forskjellige som strukturer, men har samme domene, nemlig de naturlige tall, $\mathbb{N}$.

3.3 Husk at hvis vi skifter ut aksiomet for symmetri, AS, med et aksiom for anti-symmetri, AA: $\forall x, y(xGy \wedge yGx \to x = y)$, så får vi aksiomene for partielle ordninger. Vis at en graf kan være både en ekvivalensrelasjon og en partiell ordning, d.v.s. vi at mengden som består av setningene AR, AS, AA og AT er oppfyllbar.

3.4 (Kan puffes.) Betrakt grafen $\mathbf{5} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, \leq \rangle$. Lag en mengde aksiomer $\Gamma$ slik at for enhver struktur $\mathfrak{A}$ så har vi at $\mathfrak{A} \models \Gamma$ hvis og bare hvis $\mathfrak{A}$ er isomorf med $\mathbf{5}$.