Oppgave 2

Teorem 1 (Induction principle)**.** *Gitt at P er en egenskap ved naturlige tall slik at $P(0)$ er sann, og det for alle naturlige tall n er slik at dersom $P(n)$ er sann så er $P(n+1)$ også sann. Da er P sann for alle naturlige tall.*

Teorem 2 (Least element principle)**.** *To ekvivalente formuleringer:*

- *Dersom det finnes naturlige tall som oppfyller P så finnes det et minste tall som oppfyller P.*
- *Dersom det ikke finnes et minste tall som oppfyller P finnes det* ingen *tall som oppfyller P.*

La oss vise at minste-element-prinsippet er en konsekvens av induksjonsprinsippet.

Anta at P er en egenskap slik at det ikke finnes et minste element som oppfyller P. Vi må vise utifra induksjonsprinsippet at det da ikke finnes noen naturlige tall som oppfyller P. La $P'(x)$ være sann hvis og bare hvis $P(y)$ er usann for alle $y \leq x$.

Vi har åpenbart at 0 oppfyller P', for hvis ikke ville 0 vært et minste element som oppfyller P. Dersom n oppfyller P' må vi ha at $n+1$ oppfyller P', for hvis ikke ville $n+1$ vært et minste element som oppfyller P. Men da sier induksjonshypotesen at P' er sann for alle naturlige tall, så det finnes ingen naturlige tall som oppfyller P.

La oss så vise den motsatte veien, at induksjonsprinsippet følger av minste-element-prinsippet.

Anta at P er en egenskap slik at $P(0)$ er sann og at dersom $P(n)$ er sann så må $P(n+1)$ være sann. Vi må vise utifra minste-element-prinsippet at da er P oppfyllt av alle naturlige tall.

La $P'(x)$ være egenskapen som er oppfyllt hvis og bare hvis $P(x)$ er usann. Anta (for motsigelse) at P ikke er oppfyllt av alle naturlige tall. Da må det ved minste-element-prinsippet finnes et minste tall, la oss kalle det n, som oppfyller P'. Siden $P(0)$ er sann så må vi ha at $0 \leq n$. Men da har vi at $n-1$ oppfyller P uten at n gjør det, så dermed har vi en motsigelse. Dermed har vi at P må være oppfyllt av alle naturlige tall.

Oppgave 4

Vi vil prøve å vise at

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Basissteg: For $n = 0$ er påstanden oppfylt, siden

$$\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6}.$$

Induksjonssteg: Vi antar at påstanden er sann for k og vil vise at den da er oppfylt for $k+1$.

Vi har

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \sum_{i=0}^{k} i^2 + (k+1)^2,$$

og ved induksjonsantagelsen kan vi omforme dette til

$$\frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + (k+1)^2.$$

Omformer vi alle leddene til brøker med samme nevner får vi

$$\frac{2k^3}{6} + \frac{3k^2}{6} + \frac{k}{6} + \frac{6k^2+12k+6}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}.$$

Vi sjekker så om dette er det samme som $\frac{(k+1)^3}{3} + \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{k+1}{6}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{2(k^3+3k^2+3k+1)}{6} + \frac{3(k^2+2k+1)}{6} + \frac{k+1}{6} \\
&= \frac{2k^3+6k^2+3k+1+3k^2+6k+3+k+1}{6} \\
&= \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6},
\end{aligned}$$

så påstanden holder også for $k+1$.