UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	INF3170 — Logikk
Eksamensdag:	Fredag 10. juni 2011
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Setningslogikk (vekt 20%)

1a (vekt 3%)

La Γ være en mengde (setningslogiske) setninger og φ en setning. Gi definisjonen av at φ *følger semantisk* fra Γ, altså at $\Gamma \models \varphi$.

1b (vekt 12%)

For hvert av følgende utsagn, avgjør om det er gyldig eller ikke, og bevis dette. Du står fritt, i hvert tilfelle, til å resonnere semantisk i form av valuasjoner (og sannhetstabeller) eller syntaktisk i form av naturlig deduksjon (men i det siste tilfellet bør du nevne hvilket teorem som lar deg slutte fra at det finnes et naturlig deduksjonsbevis for utsagnet til at det er gyldig).

1. $(\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \to \varphi)$
2. $(\psi \to \sigma) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$
3. $(\varphi \to \neg\varphi) \leftrightarrow \neg\varphi$
4. $\neg(\varphi \to \neg\varphi)$

1c (vekt 5%)

Formuler sunnhetsteoremet og kompletthetsteoremet for setningslogikk. Gi en kort forklaring av hvordan man kan bevise sunnhetsteoremet (ikke gi beviset, bare forklar strategien).

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 Førsteordens logikk—semantikk (vekt 30%)

2a (vekt 8%)

Språket for mengder består av én binær relasjon $\in$ (i tillegg til $=$ som vi jo alltid har), hvor $x \in y$ er ment å bety at x er et element i y. Intensjonen er å tolke dette i et domene hvor alt er mengder, slik at elementene i en mengde selv er mengder. Formaliser følgende utsagn i dette språket:

1. x er en delmengde av (eller lik) y.
2. To mengder er like hvis og bare hvis de har de samme elementene.
3. For enhver mengde z så fins en mengde w som består av alle delmengder av z (du kan bruke symbolet $\subseteq$ for å forkorte formelen du fant i 1.).

Oversett følgende utsagn til norsk:

1. $\exists y \forall x(\neg(x \in y))$

2b (vekt 10%)

Vis at

$$\not\models (\forall x \exists y \varphi(x, y)) \leftrightarrow (\exists y \forall x \varphi(x, y))$$

(Lag en formel φ i et språk du velger selv og konstruer en struktur som viser at setningen $(\forall x \exists y \varphi(x, y)) \leftrightarrow (\exists y \forall x \varphi(x, y))$ ikke er gyldig.)

2c (vekt 12%)

La $\varphi(x)$ og ψ være førsteordens formler slik at x ikke er fri i ψ. Vis at

$$\models ((\forall x \varphi(x)) \to \psi) \leftrightarrow (\exists x(\varphi(x) \to \psi))$$

(Bruk definisjonen av $\models$ og argumenter semantisk. Ikke gi en naturlig deduksjonsutledning.)

Oppgave 3 Førsteordens logikk—naturlig deduksjon (vekt 25%)

La φ og $\psi(x)$ være førsteordens formler slik at x ikke er fri i φ. Gi et naturlig deduksjonsbevis for

$$(\varphi \to \exists x \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x(\varphi \to \psi(x)))$$

via følgende trinn (hvert trinn gir altså poeng individuelt, og dette gjelder også **d** som kan løses uavhengig om du har fått til **b** og **c** eller ikke):

3a (vekt 7%)

Vis først $\leftarrow$ -retningen.

3b (vekt 6%)

Fra $\exists x \psi(x)$, utled $\exists x(\varphi \to \psi(x))$.

(Fortsettes på side 3.)

3c (vekt 6%)

Fra $\neg\exists x\psi(x)$ og $\varphi \to \exists x\psi(x)$, utled $\exists x(\varphi \to \psi(x))$.

3d (vekt 6%)

Sett bevisene i (b) og (c) sammen med et bevis for $\exists x\psi(x) \vee \neg\exists x\psi(x)$ (som du kan ta som gitt og ikke trenger å skrive ut) for å få et bevis for $\to$ -retningen.

Oppgave 4 Førsteordens logikk—teorier og modeller (vekt 25%)

4a (vekt 8%)

Formuler kompakthetsteoremet for førsteordens logikk.

4b (vekt 17%)

La L være en signatur og $\mathbb{T}_1$ og $\mathbb{T}_2$ to (konsistente) teorier (av L-setninger). Vis at hvis $Mod(\mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2) = \emptyset$ så finns en L-setning φ slik at $\mathbb{T}_1 \vDash \varphi$ og $\mathbb{T}_2 \vDash \neg\varphi$.

SLUTT