Oppgavesett 1

19. januar 2012

Vi har ikke gruppelærer ennå, så ingen frist for og ingen obligoppgaver i denne.

Oppgave 1

Les introduksjonskapitlene i van Dalen (læreboka) og Avigad (forelesningsnotatene til Jeremy Avigad, se lenke i "Beskjeder" på semestersida).

Oppgave 2

Her følger noen oppvarmingsøvelser i mengdelære. Gjør disse om du ikke er sikker på at de begrepene vi gjennomgikk sitter som spikret eller om du er usikker på hvordan du skal føre bevisene (altså svarene til "vis at"-oppgavene). Den mengdelæren vi gjennomgikk og mer er detaljert beskrevet i Roger Antonsens første forelesning fra i 2010, jeg har lenket til den under "Undervisning—Tid og sted".

a) Vis at den tomme mengde er inneholdt i alle mengder. Det vil si, gitt en vilkårlig mendge A, vis at $\emptyset \subseteq A$. Vis at den tomme mengden ikke er medlem av, altså ikke er element i, alle mengder. Det vil si, vis at det finnes en mengde A slik at $\emptyset \notin A$.

b) Vis at hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$ så $A \subseteq C$.

c) For en mengde A så er *potensmengden* til A mengden av alle delmengder av A. Vi skriver potensmengden til A som $\mathcal{P}(A)$. Definisjonen av potensmengden er altså: For alle mengder B så har vi at

$$B \in \mathcal{P}(A) \text{ hvis og bare hvis } B \subseteq A$$

Skriv ut potensmengden til mengden $\{0, 1, 2\}$. (Hint: Hvis du har fått med alt skal du ende opp med en mengde som har i alt åtte elementer.)

d) Betrakt mengdene $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ er et partall}\}$ og $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Er de like? Er den ene inneholdt i den andre?

e) Definer *snittet* av to mengder som mengden som inneholder de elementene som er felles for A og B, altså $A \cap B = \{a |\ a \in A \text{ og } a \in B\}$.
Definer *unionen* av to mengder som mengden som inneholder de elementene som er enten i A eller i B (eller i begge), altså $A \cup B = \{a |\ a \in A \text{ eller } a \in B\}$.
Beregn følgende :

(i) $\{0, 1, 2, 3\} \cap \{\emptyset, \{2\}, 1, \{0\}\}$

(ii) $\{\{\emptyset\}\} \cap \{\{\{\emptyset\}\}\}$

(iii) $\{0, 1, 2, 3\} \cup \{\emptyset, \{2\}, 1, \{0\}\}$

(iv) $\{\{\emptyset\}\} \cup \{\{\{\emptyset\}\}\}$

Spesialoppgave for interesserte—Russels paradoks

Vi rakk ikke dette i forelesningen, men det er strengt tatt ikke legitimt å definere en mengde ved å gi en egenskap som beskriver en samling objekter, det vil si å skrive $\{a \mid a \text{ har egenskapen } P\}$. Derimot er det alltid legitimt å bruke den såkalte *mengdebyggeroperasjonen*: Det vil si at hvis vi har gitt en mengde A så kan vi alltid danne mengden $\{a \in A \mid a \text{ er } P\}$, der P er en eller annen egenskap. Følgende oppgave viser hvorfor vi må ha denne restriksjonen. Anta at man alltid kan lage en mengde ved å ta samlingen av objekter som tilfredsstiller en eller annen egenskap P. Det vil si at $\{a \mid a \text{ er } P\}$ er en mengde, uten at a'ene trenger å være elementer av en gitt mengde A. Mengder er selv objekter som kan være elementer i mengder, så da er følgende en mengde:

$$R := \{\ A \mid A \text{ er en mengde og } A \notin A\}$$

Vis at R er medlem av seg selv hvis og bare hvis R ikke er medlem av seg selv, altså at $R \in R$ hvis og bare hvis $R \notin R$, slik at vi har en motsigelse.