Teorier og modeller: Definisjoner og oppgaver

23. april 2012

Det som står som definisjoner nedenfor er noen av definisjonene fra forelesningen den 23. og 30. april. Det som står angitt som teoremer er oppgaver. Oppgaven er å bevise teoremet. Det anbefales at dere gjør oppgavene fortløpende når dere leser igjennom dokumentet. De aller fleste er veldig enkle (mange kan gjøres i hodet), og er ment som hjelpemiddel for å forstå og/eller repetere definisjonene de står sammen med.
Hvis ikke annet er oppgitt så er alle definisjoner og oppgaver gitt med tanke på en gitt (dvs. vilkårlig, men fastlagt) signatur, $\mathcal{L}$. Videre i dette dokumentet vil jeg ofte skrive "$\phi \in SENT$" som forkortelse for "ϕ er en $\mathcal{L}$-setning". Vi skal stort sett bare bry oss om setninger i definisjonene nedenfor. Husk at gitt en mengde $\mathcal{L}$-setninger, Γ og en $\mathcal{L}$-setning, ϕ så sier vi at ϕ er en *semantisk konsekvens* av Γ og at Γ *impliserer* ϕ semantisk, og skriver

$$\Gamma \models \phi$$

hvis følgende holder: For alle $\mathcal{L}$-strukturer, $\mathfrak{A}$, hvis alle setningene i Γ er sanne i $\mathfrak{A}$ så er også ϕ sann i $\mathfrak{A}$. Husk at per kompletthetsteoremet så er dette ekvivalent med at det finnes et bevis for ϕ med (alle åpne) premisser i Γ, altså at

$$\Gamma \vdash \phi$$

Det er også nyttig å huske at en ekvivalent formulering av kompletthetsteoremet er: For enhver mengde Γ av setninger så er Γ konsistent hvis og bare hvis det finnes en struktur hvor alle setninger i Γ er sanne.

Definition 0.0.1 (Teori og aksiom)

1. En *teori* er en mengde $\mathcal{L}$-setninger som er lukket under konsekvens. Dvs. at en mengde, $\mathbb{T}$, er en teori hvis følgende holder: For alle $\mathcal{L}$-setninger, ϕ, så har vi at

$$\mathbb{T} \vdash \phi \Rightarrow \phi \in \mathbb{T}$$

2. For en mengde, Γ, av $\mathcal{L}$-setninger så sier vi at Γ definerer eller *aksiomatiserer* teorien som består av tillukningen av Γ under konsekvens. Vi skriver $\mathbb{T}_\Gamma$ for denne teorien, og den er altså definert som følger:

$$\mathbb{T}_\Gamma = \{\phi \in SENT | \Gamma \vdash \phi\}$$

I oppgavene som følger må dere gjerne bruke kompletthetsteoremet og bytte ut $\vdash$ med $\vDash$ hvis det synes praktisk.

Theorem 0.0.2 *1.* $\Gamma \subseteq \mathbb{T}_\Gamma$

2. $\mathbb{T}_\Gamma$ *er lukket under konsekvens (dvs. at denne mengden er en teori, slik definisjonen over påstår).*

La $\mathfrak{A}$ være en $\mathcal{L}$-struktur. Husk at vi skriver "$\mathfrak{A} \vDash \phi$" for "ϕ er sann i $\mathfrak{A}$" og "$\mathfrak{A} \vDash \Gamma$" for "alle $\phi \in \Gamma$ er sanne i "$\mathfrak{A}$".

Definition 0.0.3 (Modell) En *modell* for en teori $\mathbb{T}$ (eller en mengde aksiomer Γ) er en $\mathcal{L}$-struktur $\mathfrak{M}$ slik at $\mathfrak{M} \vDash \mathbb{T}$ ($\mathfrak{M} \vDash \Gamma$).

Theorem 0.0.4 *1. For enhver* $\mathcal{L}$*-struktur* $\mathfrak{A}$ *så har vi at* $\mathfrak{A} \vDash \Gamma \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \mathbb{T}_\Gamma$

2. Det finnes en teori $\mathbb{T}$ *slik at alle* $\mathcal{L}$*-strukturer er* $\mathbb{T}$*-modeller.*

3. Det finnes en teori som ikke har noen modeller.

Definition 0.0.5 (Teorien til en modell) Gitt en $\mathcal{L}$-struktur, $\mathfrak{M}$. *Teorien til* $\mathfrak{M}$ skrives og defineres som følger:

$$Th(\mathfrak{M}) = \{\phi \in SENT | \mathfrak{M} \vDash \phi\}$$

Theorem 0.0.6 *Gitt en* $\mathcal{L}$*-modell,* $\mathcal{M}$*. Da er* $Th(\mathcal{M})$ *lukket under konsekvens (dvs. at denne mengden er en teori, slik definisjonen over påstår).*

Definition 0.0.7 (Komplett teori) En mengde $\mathcal{L}$-setninger, Γ, er *komplett* hvis følgende holder: For alle $\mathcal{L}$-setninger, ϕ, så er enten ϕ eller $\neg\phi$ med i Γ.

Theorem 0.0.8 *1. Hvis* Γ *er en komplett og konsistent mengde* $\mathcal{L}$*-setninger så er* Γ *en teori.*

2. Gitt en $\mathcal{L}$*-struktur,* $\mathfrak{M}$*. Da er* $Th(\mathfrak{M})$ *komplett.*

3. Gitt en komplett og konsistent teori $\mathbb{T}$*. Det finnes en* $\mathbb{T}$*-modell* $\mathfrak{M}$ *slik at* $\mathbb{T} = Th(\mathfrak{M})$

4. Gitt en mengde setninger Γ*. Hvis* Γ *er konsistent så finnes det en komplett og konsistent teori* $\mathbb{T}$ *slik at* $\mathbb{T}_\Gamma \subseteq \mathbb{T}$*.*

Definition 0.0.9 (Teorien til en klasse modeller) Gitt en klasse, $\mathbf{X}$, av $\mathcal{L}$-modeller. *Teorien til* $\mathbf{X}$ skrives og defineres som følger:

$$Th(\mathbf{X}) = \{\phi \in SENT | \mathfrak{M} \vDash \phi \text{ for alle } \mathfrak{M} \in \mathbf{X}\}$$

Theorem 0.0.10 *1.* $Th(\mathbf{X})$ *er lukket under semantisk konsekvens (dvs. at denne mengden er en teori, slik definisjonen over påstår).*

2. Det finnes en klasse, $\mathbf{X}$*, slik at* $Th(\mathbf{X})$ *ikke er komplett.*

3. *Det finnes en klasse,* $\mathbf{X}$*, slik at* $Th(\mathbf{X})$ *er komplett.*

Definition 0.0.11 (Elementær klasse) Gitt en mengde, Γ, av $\mathcal{L}$-setninger. Klassen av alle $\mathcal{L}$-strukturer som gjør alle setningene i Γ sanne er et eksempel på en såkalt *elementær klasse* (fordi den er definert av en mengde førsteordens setninger, ordet "elementær" henviser ofte til førsteordens logikk), og skrives

$$\mathrm{Mod}(\Gamma) = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models \Gamma \text{ for alle } \phi \in \Gamma\}$$

Theorem 0.0.12

1. $\mathrm{Mod}(\Gamma) = \mathrm{Mod}(\mathbb{T}_\Gamma)$.
2. *For enhver mengde* $\mathbf{X}$ *av strukturer, så har vi at* $\mathbf{X} \subseteq \mathrm{Mod}(Th(\mathbf{X}))$.
3. *For enhver teori* $\mathbb{T}$*, så har vi at* $\mathbb{T} = Th(\mathrm{Mod}(\mathbb{T}))$ *(her må du bruke kompletthet).*
4. $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \mathrm{Mod}(\Delta) \subseteq \mathrm{Mod}(\Gamma)$
5. $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \Rightarrow Th(\mathbf{Y}) \subseteq Th(\mathbf{X})$
6. $\mathrm{Mod}(\Gamma \cup \Delta) = \mathrm{Mod}(\Gamma) \cap \mathrm{Mod}(\Delta)$
7. $Th(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = Th(\mathbf{X}) \cap Th(\mathbf{Y})$
8. $\mathbf{X} \subseteq \mathrm{Mod}(\Gamma) \Leftrightarrow \Gamma \subseteq Th(\mathbf{X})$
9. $\mathrm{Mod}(\Gamma \cap \Delta) \supseteq \mathrm{Mod}(\Gamma) \cup \mathrm{Mod}(\Delta)$
10. $Th(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \supseteq Th(\mathbf{X}) \cup Th(\mathbf{Y})$

Definition 0.0.13 (Elementær ekvivalens) To $\mathcal{L}$-modeller, $\mathfrak{M}$ og $\mathfrak{N}$, kalles *elementært ekvivalente*, og vi skriver

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$$

hvis $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$, dvs. hvis

$$\mathfrak{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi$$

for alle $\mathcal{L}$-setninger ϕ.

Theorem 0.0.14 *En teori er komplett hvis og bare hvis alle modeller er elementært ekvivalente.*

Nå kan vi fiksere to signaturer, $\mathcal{L}_1$ og $\mathcal{L}_2$, der $\mathcal{L}_2$ utvider $\mathcal{L}_1$, i den forstand at alle relasjons- og funksjonssymboler og alle konstanter i $\mathcal{L}_1$ også er i $\mathcal{L}_2$. For enhver $\mathcal{L}_2$-struktur $\mathfrak{A}$ får vi da en $\mathcal{L}_1$-struktur ved å begrense $\mathfrak{A}$ til $\mathcal{L}_1$. La $\mathbb{T}_1$ være en teori over $\mathcal{L}_1$ og $\mathbb{T}_2$ en teori over $\mathcal{L}_1$.

Definition 0.0.15

1. $\mathbb{T}_2$ er en *utvidelse* av $\mathbb{T}_1$ hvis $\mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2$.

2. $\mathbb{T}_2$ er en *konservativ utvidelse* av $\mathbb{T}_1$ hvis $\mathbb{T}_2$ er en utvidelse av $\mathbb{T}_1$ og for enhver $\mathcal{L}_1$-setning ϕ i $\mathbb{T}_2$ så er ϕ i $\mathbb{T}_1$.

Theorem 0.0.16 *1. $\mathbb{T}_2$ er en utvidelse av $\mathbb{T}_1$ hvis og bare hvis begrensningen av enhver $\mathbb{T}_2$-modell til $\mathcal{L}_1$ er en $\mathbb{T}_1$-modell.*

2. Hvis enhver $\mathbb{T}_1$-modell kan utvides til en $\mathbb{T}_2$-modell så er $\mathbb{T}_2$ er en konservativ utvidelse av $\mathbb{T}_1$.

(Som en avsluttende "sirkeloppgave" kan du tenke på et eksempel som viser at det finnes teorier $\mathbb{T}_1$ og $\mathbb{T}_2$ slik at $\mathbb{T}_2$ er en konservativ utvidelse av $\mathbb{T}_1$, men ikke alle $\mathbb{T}_1$-modeller kan utvides til en $\mathbb{T}_2$-modell.)