UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	IN 256 — Signalbehandling
Eksamensdag:	6. desember 2002
Tid for eksamen:	9.00 – 15.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle trykte og skrevne

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Dette oppgavesettet består av 3 oppgaver som kan løses uavhengig av hverandre. Skulle noe være uklart i en oppgave, så skriv klart hvilke forutsetninger du gjør for å løse oppgaven, og gå videre!
Husk å besvare alle deloppgaver da disse vektes likt ved sensuren.

Oppgave 1 Filteranalyse

Et filter har z-transform gitt ved

$$H(z) = \frac{z}{z - 0.6}.$$

1a

Finn poler og nullpunkter til dette filteret.

1b

Finn verdien til frekvensreponsen for $\omega = 0$, $\pi/2$ og π, og skisser tallverdien til frekvensresponsen.

1c

Finn de 5 første verdiene til impulsresponsen til filteret.

1d

Lag et FIR filter av lengde 5 ved å avkorte frekvensreponsen til det opprinnelige filteret og finn dets frekvensrespons $H_2(e^{j\omega})$ ved $\omega = 0$, $\pi/2$ og π. Sammenlign med det opprinnelige filterets frekvensrespons (tallverdi). Har dette filteret lineær fase?

(Fortsettes på side 2.)

1e

Uttrykk $H_2(e^{j\omega})$ ved hjelp av $H(e^{j\omega})$ og en vindusfunksjon, og bruk det til å forklare hvordan $H_2(e^{j\omega})$ avviker fra $H(e^{j\omega})$.

Oppgave 2 Filterdesign

2a

Vi lar $y[n] = x[R-n]$, der $x[n]$ er en reell sekvens. Vis at z-transformen til $y[n]$ kan skrives som

$$Y(z) = z^{-R}X(1/z).$$

2b

La nå $R = 2$, og la $x[n]$ være kausal. $X(z)$ har ett nullpunkt i $z = -1$ og tre poler i $z = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 \pm j)$ og $z = -\frac{1}{2}$. Hva er konvergensområdet til $X(z)$?

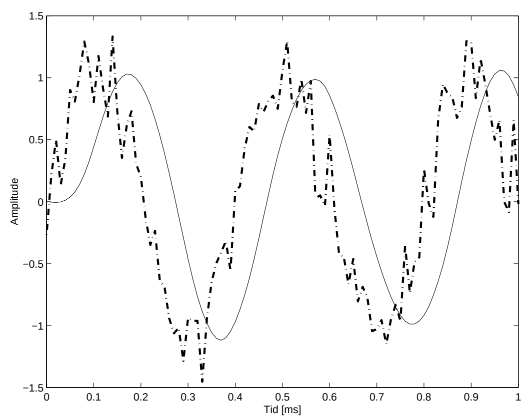
2c

Tegn pol-nullpunktsdiagrammet til $Y(z)$. Angi konvergensområdet til $Y(z)$. Er $Y(z)$ stabil? Begrunn svaret!

2d

I filterdesign arbeider vi ofte med tallverdien til frekvensresponsen uten å ta hensyn til fasen.

I Figur 1 ser vi en støyfylt sinus (stiplet linje) med frekvens $f_0 = 2.5\,\text{kHz}$. Denne har blitt filtrert med et 3.-ordens Butterworth filter med kuttfrekvens $f_c = 3\,\text{kHz}$. Vi ser at det filtrerte signalet (heltrukken linje) er betydelig faseforskjøvet i forhold til det støyfylte signalet.

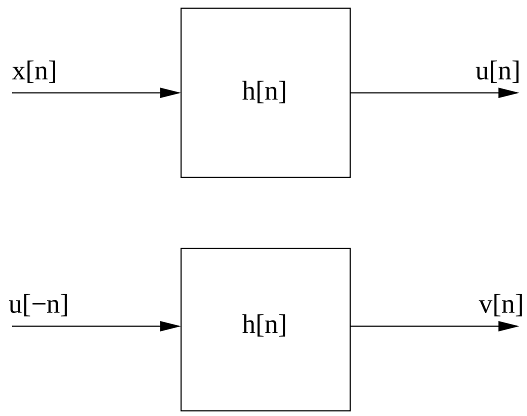


Figur 1: Støyfylt signal (stiplet linje) filtrert med et Butterworth filter (heltrukken linje).

(Fortsettes på side 3.)

Til noen formål ønsker vi at fasen under filtrering skal være null. Dette er ikke mulig for kausale filtere. La oss se på en ikke-kausal metode for å få til null fase. Til dette skal vi bruke resultatene fra første del av oppgaven.

La $h[n]$ være et kausalt filter, og la $y[n] = v[-n]$, der $v[n]$ er gitt ved operasjonen vist i blokk-diagrammet i Figur 2.



Figur 2: Null-fase system.

Hva blir den samlede impulsresponsen $h_{\text{total}}[n]$ for systemet, relatert til $h[n]$? Vis at $h_{\text{total}}[n]$ har null fase.

Oppgave 3 Sampling

Et båndpassignal kan skrives som $x(t) = A(t)\cos(\omega_c t + \theta(t))$, der ω_c er frekvensen til bærebølgen. Vi sender digital informasjon ved hjelp av dette signalet ved å gi $A(t)$ og/eller $\theta(t)$ diskrete verdier. $A(t)$ og $\theta(t)$ er langsomtvarierende sammenlignet med bærebølgen.

3a

$x(t)$ samples i en mottaker der vi ønsker å dekode informasjonen. Vi velger samplingsfrekvensen $\omega_s = 4\omega_c$. Vis at to etterfølgende samples da kan skrives som

$$\begin{aligned} x[n] &= \quad A[n]\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \theta[n]\right) \\ x[n+1] &= -A[n]\sin\left(\frac{\pi n}{2} + \theta[n]\right). \end{aligned}$$

3b

To og to verdier av sekvensen $x[n]$ brukes til å lage den komplekse sekvensen $z[n] = x[n] + jx[n+1]$.

Finn $z[n]$ uttrykt på polar form.

(Fortsettes på side 4.)

3c

Sekvensen $u[n] = A[n]e^{j\theta[n]}$ inneholder den informasjonen vi er på jakt etter. Forklar hvordan vi kan få denne sekvensen direkte fra sekvensen $x[n]$ bare ved å bruke fortegnsskift og ikke addisjon eller multiplikasjon.

3d

Anta at $u[n]$ har båndbredde $B \leq \omega_c/4$. Hvor mange ganger kan sekvensen $u[n]$ nedsamples uten aliasing? Begrunn svaret!