UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Eksamen i	INF3470/4470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	11. desember 2012
Tid for eksamen:	14:30 – 18:30
Oppgåvesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatne hjelpemiddel:	Ingen

Kontroller at oppgåvesettet er komplett før
du tek til å svare på spørsmåla.

Oppgåve 1

a) Finn z-transforma (og oppgi ROC) til sekvensa

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for} \quad n \in [-2, 2], \qquad n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{for} \quad n = 0, \\ 0 & \text{elles}, \end{cases}$$

der $\mathbb{Z}$ symboliserer heiltal. 1 p.

b) Finn z-transforma (og oppgi ROC) til funksjona

$$x[n] = n\, 2^{n-1}\, u[n-1].$$

Hint: Nokre av z-transforma sine eigenskaper bør her nyttast for å forenkle utrekningane. 1 p.

c) Me har gitt to endeleg lange sekvensar $x[n]$ og $h[n]$. Vis at:

$$x[n] * h[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X(z)\, H(z),$$

der $*$ er konvolusjonsoperatoren. Kan du kort si noko om kvifor denne eigenskapa er nyttig? 2 p.

(Framhald på side 2.)

Oppgåve 2

Me har to hovudtypar filter: FIR og IIR

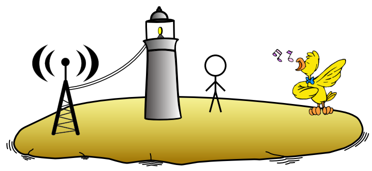
a) Kva står desse akronyma for, og korleis er desse filtere fundamentalt forskjellige? Samanlikn impulsrespons, stabilitet, kausalitet og ytinga til filteret med omsyn til amplitude- og faserespons. 2 p.

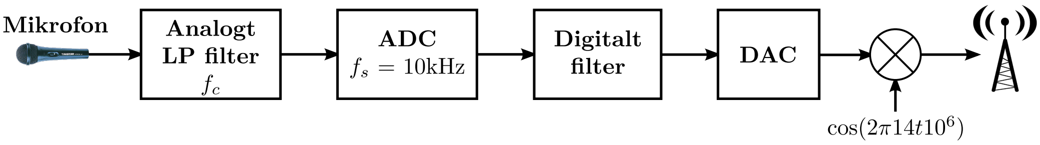
b) Nemn dei fire hovudtypane FIR filter som gir eksakt lineær fase, og teikn magnituderesponsen til dei forskjellige typane. Kva innskrenkingar gjeld når vi ønskjer å implementere lågpass-, høgpass-, bandpass- eller bandstoppfiltere? 1 p.

c) Fire hovudtypar IIR filtere er Butterworth, Chebyshev type 1 og 2, og elliptiske filtere. Kva kjenneteiknar desse filtra? Samanlikn magnituderesponsen i passband, stoppband og transisjonsband. Kva filter gir raskaste overgang frå transisjonsband til stoppband? 1 p.

Oppgåve 3

Du er busett i eit fyrtårn på ei øy. For å kunne kommunisere med folk har du kjøpt ein digital amatørradio som byggjesett. Vedlagt ligg det ei skisse for korleis delane skal koplast saman:





der LP står for lågpass, ADC er ein analog-til-digital omformar, DAC er ein digital-til-analog omformar, f_c er kuttfrekvens og f_s er samplingsfrekvens.

a) Forklar kort kva slags funksjon dei forskjellige komponentane har, men ignorér det digitale filteret (dette er emne i oppgåve **b**). Kva trur du er mest sannsynleg, at ADC og DAC er 1bit, 10bit eller 24bit? Kvifor samplar vi på 10kHz, og ikkje på vesentleg høgare (eller lågare) frekvens? Kva for krav stilles til lågpassfilteret sin kuttfrekvens f_c, og kva kunne det vore fornuftig å setje denne til i dette tilfellet? 2 p.

På øya er det ein fugl som bråkar, og som forstyrrar kommunikasjonen med dei du snakkar med. Difor vert det implementert eit digitalt Notch-filter som så vidt fjernar alt fuglekvitteret:

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\pi/4})(z - e^{-j\pi/4})}{(z - 0.95e^{j\pi/4})(z - 0.95e^{-j\pi/4})}$$

Bandbreidda Ω_Δ til Notch-filteret kan her finnast ved å nytte følgjande tommelfingerregel: $R = 1 - 0.5\Omega_\Delta$, der R er absoluttverdien til Notch-filterets polar.

(Framhald på side 3.)

b) Teikn opp polar og nullpunkt for dette filteret. 1 p.

c) Kva for senterfrekvens og bandbreidd har fuglesongen? Vil filteret påverke talekvaliteta nemneverdig? 1 p.

Oppgåve 4

Vi har gitt eit kausalt filter som er karakterisert av differenslikninga:

$$y[n] = c\,y[n-1] + (1-c)\,x[n] \qquad c \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad 0 < c < 1.$$

a) Teikn flytdiagram for filteret direkte etter denne likninga. 1 p.

b) Vis at systemfunksjonen til filteret er gitt ved

$$H(z) = \frac{1-c}{1-c\,z^{-1}}.$$

1 p.

c) Legg til grunn at vi påtrykk eit einhetssprang, $x[n] = u[n]$. Finn fyrst z-transforma $Y(z)$ til utgangssignalet $y[n]$, for så å finne $y[n]$ ved hjelp av delbrøksoppspalting og invers z-transform. 1 p.

d) Vis at $\lim\limits_{n\to\infty} y[n] = 1$. Kan du finne dette svaret også direkte frå $H(z)$? 1 p.

Oppgåve 5

Eit allpass-system har forma:

$$H(z) = \frac{z^{-1}-a}{1-a\,z^{-1}} \qquad a \in \mathbb{R}$$

a) Finn polar og nullpunkt for $H(z)$. 1 p.

b) Vis at $|H(\Omega)| = 1$ for alle Ω. 1 p.

c) Vis at $\angle H(\Omega) = \pm\pi$ når $\Omega = \pi$. 1 p.

d) Vis at for $0 < a < 1$ så er $\angle H(\Omega)$ negativ for alle Ω. 1 p.

(Framhald på side 4.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Diskret konvolusjon:

$$
y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]
$$

Diskret-tid Fouriertransformasjon (DTFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(\Omega) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega
\end{aligned}
$$

Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1
\end{aligned}
$$

z-transformasjonen:

$$
\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}
$$