UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	12. desember 2013
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 z-transformen

a) Finn z-transformen og tilhørende Region of Convergence (ROC) til den tosidede datasekvensen:

$$x[n] = \begin{cases} a^n & \text{for} \quad n \geq 0, \qquad n \in \mathbb{Z}, \\ -b^n & \text{for} \quad n < 0, \end{cases}$$

der $n \in \mathbb{Z}$ betyr at n er heltall. 1 p.

b) En impulsrespons $h[n]$ har z-transformen:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}.$$

Tegn poler og nullpunkt for denne transformen. 1 p.

c) $H(z)$ i **b)** kan være kausal, anti-kausal, eller tosidig. Skisser de fire (og ikke tre) mulighetene en da får for ROC, og avgjør hvilke av disse som eventuelt er stabile. 2 p.

d) Hvorfor er det så viktig at et filter er stabilt? 1 p.

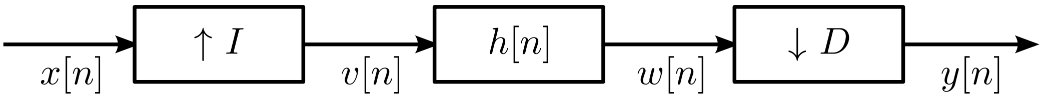
e) En av z-transformens egenskaper omhandler tidsreversering:

$$\begin{array}{llll} \text{Hvis} & x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) & \text{med} & \text{ROC:} \quad r_1 < |z| < r_2 \\ \text{så er} & x[-n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z^{-1}) & \text{med} & \text{ROC: } 1/r_2 < |z| < 1/r_1. \end{array}$$

Bruk definisjonen til z-transformen for å vise at dette stemmer. Hvordan påvirkes $X(z)$ hvis $x[n]$ er symmetrisk? 1 p.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 Konvertering av samplerate



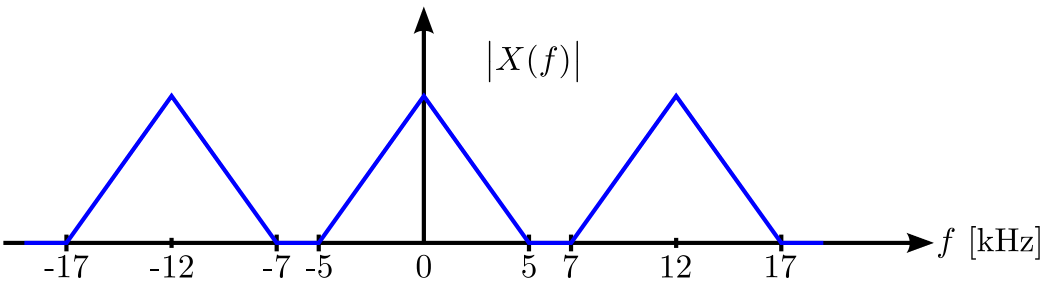
Figur 1: System for ratekonvertering

I figuren over er det vist et system for opp- og ned-sampling av diskrete signaler, såkalt ratekonvertering. Vi tenker oss at $x[n]$ er samplet fra et kontinuerlig signal. Hvis for eksempel $I = 2$ vil $v[n]$ inneholde et ekstra null-sampel mellom hvert av samplene i $x[n]$.

Filteret $h[n]$ er et perfekt lavpassfilter med knekkfrekvens f_c som er så stor som mulig uten at konvolveringsfeil (frekvens-aliasing) oppstår (dette betyr at f_c avhenger av I).

Nedsampling foregår i siste filter. Hvis for eksempel $D = 3$ vil $y[n]$ bare innholde hvert tredje sampel fra $w[n]$.

Kort sagt så vil systemet vist i Figur 1 endre samplingsfrekvensen fra f_s til $(I/D)f_s$ der f_s er gitt i Hz. Anta at magnituderesponsen til inngangssignalet $x[n]$ er som vist i Figur 2 (merk at spekteret ikke er angitt med normalisert frekvens) og at $f_s = 12$ kHz.



Figur 2: Magnituderesponsen til $x[n]$

2a

Skisser frekvensspektra for $v[n]$, $w[n]$ og $y[n]$, samt magnituderesponsen (inklusive knekkfrekvens) for $h[n]$ i følgende to tilfeller:

1. $I = 3$, $D = 2$. 1 p.
2. $I = 2$, $D = 3$. 1 p.

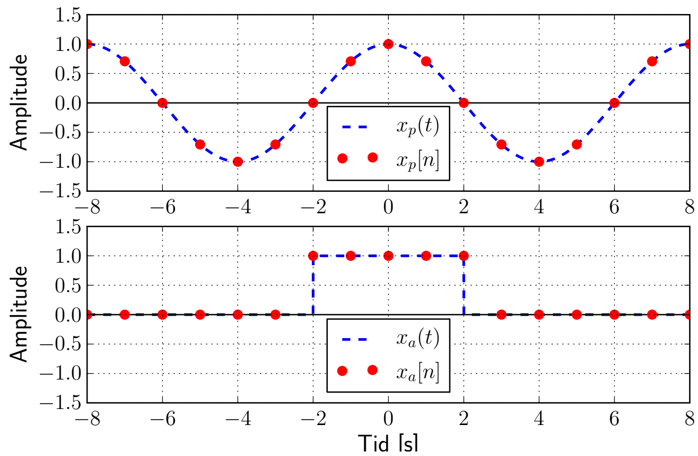
2b

Hvordan må forholdet I/D være for at $x[n]$ skal kunne gjenvinnes eksakt fra $y[n]$? 1 p.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3 Signaler i tid og frekvens

Vi sampler et periodisk signal $x_p(t)$ og får $x_p[n]$, og sampler et ikke-periodisk signal $x_a(t)$ og får $x_a[n]$. Samplingsfrekvensen er 1 Hz. Alle signalene er vist i Figur 3:



Figur 3: To analoge signaler samples.

a) Skisser magnituderesponsen til disse fire signalene, og sett minst en størrelse på både frekvensaksen og magnitudeaksen (i tillegg til 0 i origo). Hvilket symbol og hvilken enhet vil det være fornuftig å bruke på frekvensaksen i hvert tilfelle? 2 p.

I dette kurset har vi i hovedsak snakket om 3 transformer for digitale tidssignaler:

z-transform: $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Diskret-tid Fourier transform (DTFT): $$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

Diskret Fourier transform (DFT): $$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

b) Hvilke(n) transform(er) ville du brukt i disse tilfellene (begrunn svaret!): 1 p.

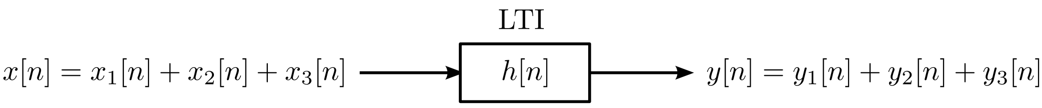
1. Du har samplet et signal fra en mikrofon og ønsker å finne frekvensinnholdet til dette signalet. En datamaskin er tilgjengelig.
2. Du må designe et infinite impulse response (IIR) filter, mangler datamaskin, men har penn og papir?
3. Du ønsker å analytisk finne frekvensresponsen til en vindu.

c) Hvordan kan man finne DTFTen hvis man allerede har et uttrukk for z-transformen? 1 p.

(Fortsettes på side 4.)

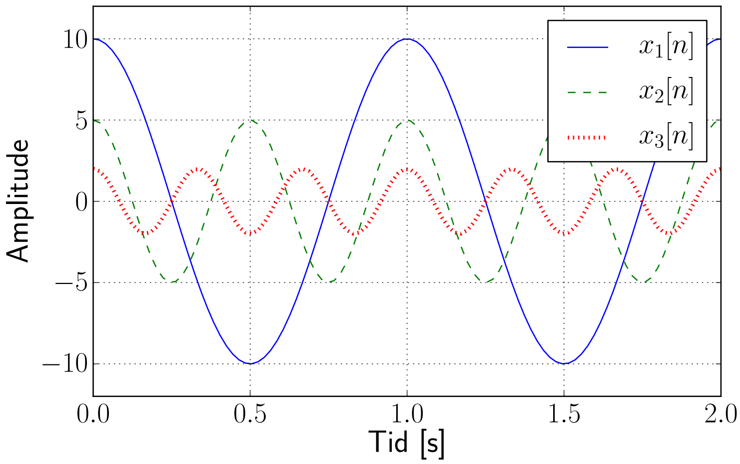
Oppgave 4 Filtere

Et lineært og tidsinvariant (LTI) system filtrerer en sum av tre sinus-signaler:

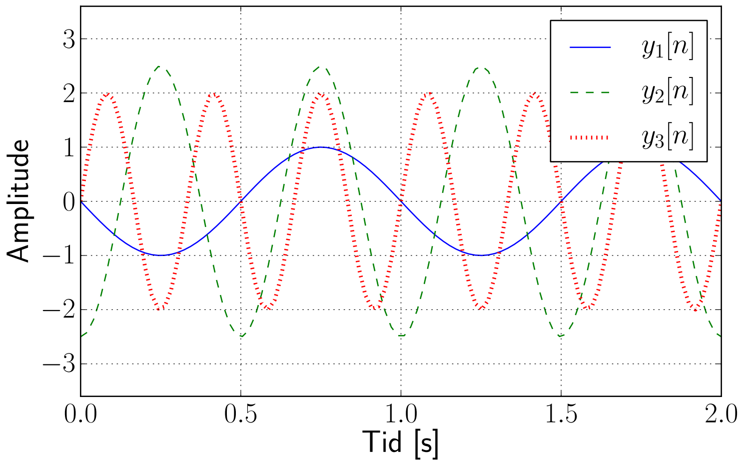


Figur 4: Et LTI system.

Hvordan disse signalene ser ut før og etter de har passert gjennom filteret er vist i Figur 5 og 6:



Figur 5: Plot av $x_1[n]$, $x_2[n]$, og $x_3[n]$.



Figur 6: Plot av $y_1[n]$, $y_2[n]$, og $y_3[n]$.

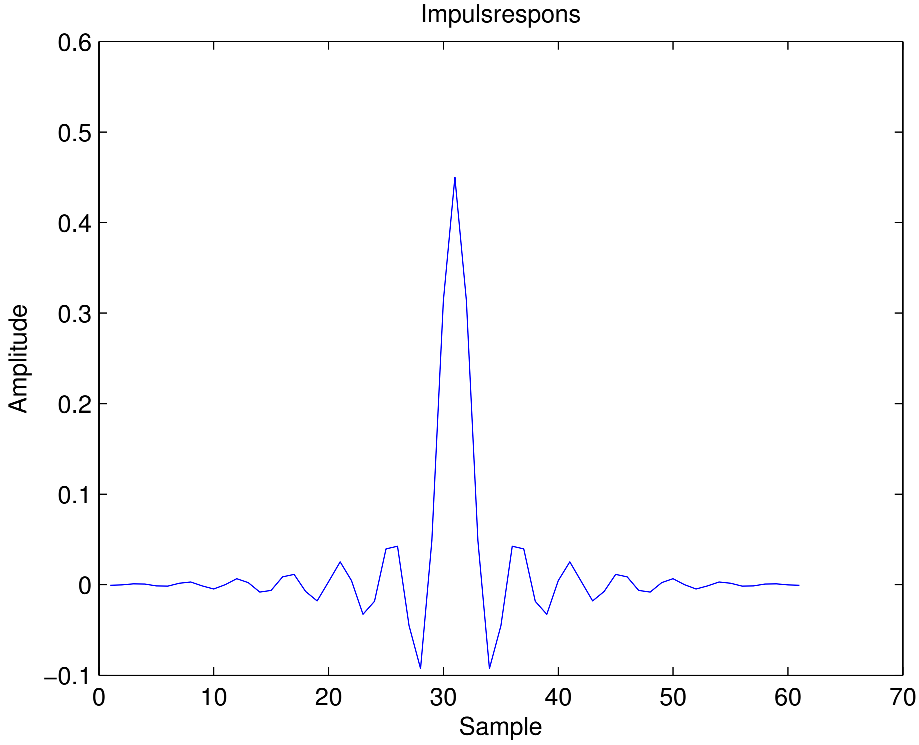
a) Skisser magnitude- og faseresponsen til dette filteret. 1 p.

b) Forklar forskjellen på fase- og gruppeforsinkelse, gjerne ved å bruke Figur 5 og 6 som eksempel. Finn også gruppeforsinkelsen til dette filteret: 1 p.

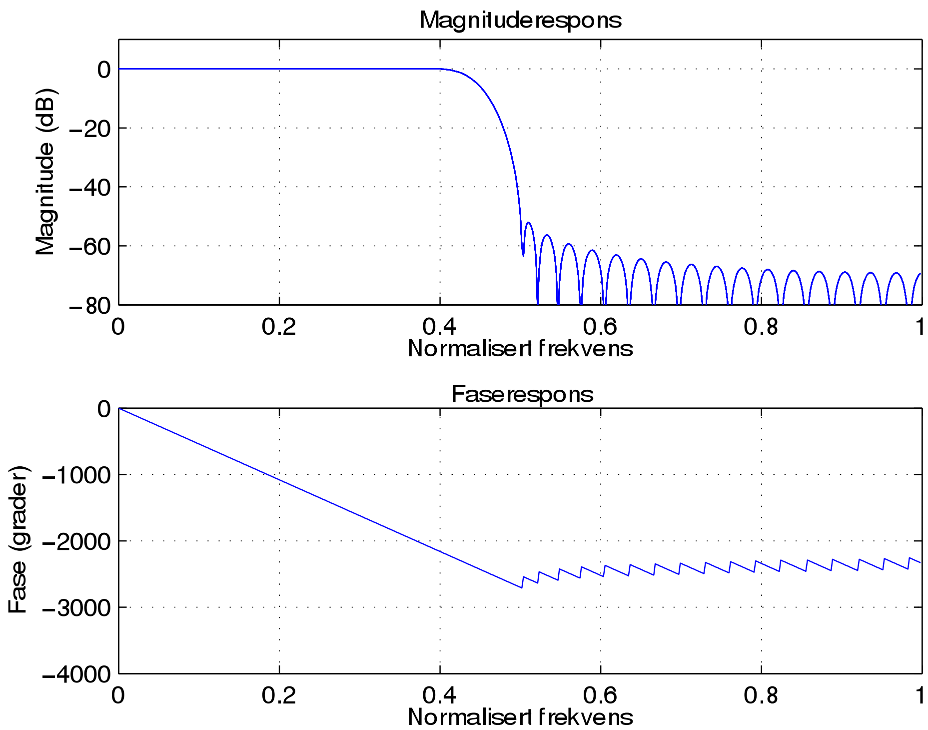
$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z + 1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{z}$$

c) Et annet filter har en impulsrespons som vist i Figur 7 og en frekvensrespons som vist i Figur 8. Er dette et FIR eller IIR filter? Argumenter godt for svaret ditt. 1 p.

(Fortsettes på side 5.)



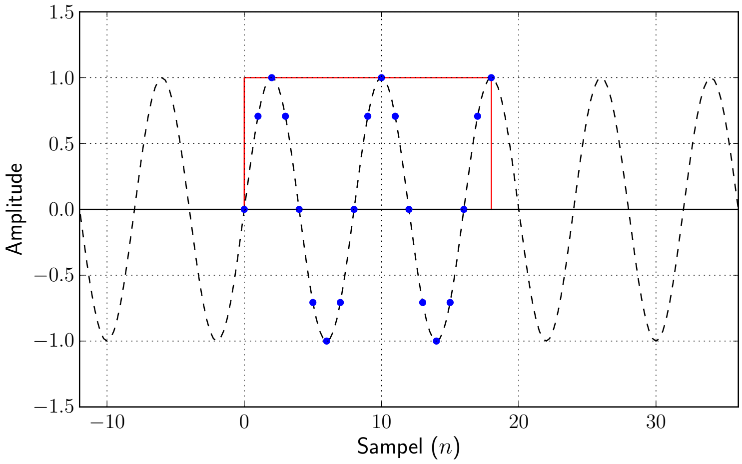
Figur 7: Filterets impulsrespons.



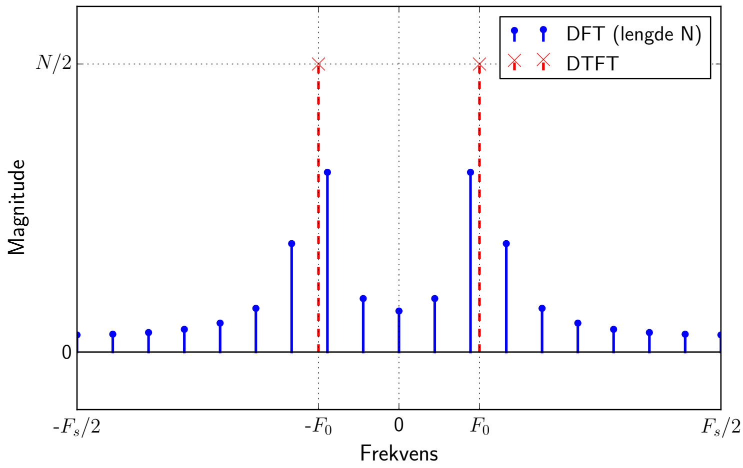
Figur 8: Filterets frekvensrespons.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 5 DFT og DTFT



Figur 9: Et samplet datasignal.



Figur 10: Magnituden til DFT og DTFT av signalet i Figur 9.

Vi forsøker å benytte DFT for å beregne magnituderesponsen til det stiplede signalet i Figur 9. Resultatet er vist i Figur 10, der DTFTen også er tegnet inn (gir riktig resultat).

a) Hvorfor gir ikke DFTen riktig magnituderespons når DTFTen gjør det? 1 p.

b) I Figur 9 er det valgt et rektangulært vindu. Hva hadde skjedd med DFTens resultat hvis vi i stedet hadde brukt et trekantet vindu med samme lengde? 1 p.

c) Vi antar at vinduet i Figur 9 har lengde L og kan da beskrive det slik:

$$w[n] = u[n] - u[n - L]$$

Finn DTFTen $W(\Omega)$ til dette vinduet. Hva skjer med hovedlobe-bredden og sidelobene når vinduets lengde L går mot uendelig? 1 p.

(Fortsettes på side 7.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Diskret konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

Diskret-tid Fouriertransformasjon (DTFT):

$$\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(\Omega) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega
\end{aligned}$$

Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1
\end{aligned}$$

z-transformasjonen:

$$\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$