UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3470/4470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	10. desember 2014
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Analyse i frekvensdomenet

a) Finn DC forsterningen til et 3 punkts filter der filterets impulsrespons er gitt som $h[n] = \left\{\alpha, \overset{\Downarrow}{\beta}, \alpha\right\}$ og filteret fullstending blokkerer den normaliserte frekvensen $F = \frac{1}{3}$ og slipper igjennom den normaliserte frekvensen $F = 0.125$ med enhetsforsterkning. Merk: Med $F = 1$ menes her Nyquistfrekvensen. 1 p.

b) Et system er beskrevet av $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + 3x[n-2]$.

1. Finn $H[F]$ for systemet. Finn systemets DC forsterkning og høyfrekvens forsterkning. 1 p.
2. Find systemets impulsrespons $h[n]$. 1 p.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 Filterkonsepter

a) I Figur 1 er vist pol-nullpunktsplott til overføringsfunksjonen $H[z]$ til fire filtre A, B, C og D. Alle filtrene er kausale, og radius til sirkel indikert i det komplekse planet er $|z| = 1$.

Karakteriser hvert av filtrene i henhold til egenskapene gitt under og før dette inn i en tabell som følger oppgitte mal. 2 p.

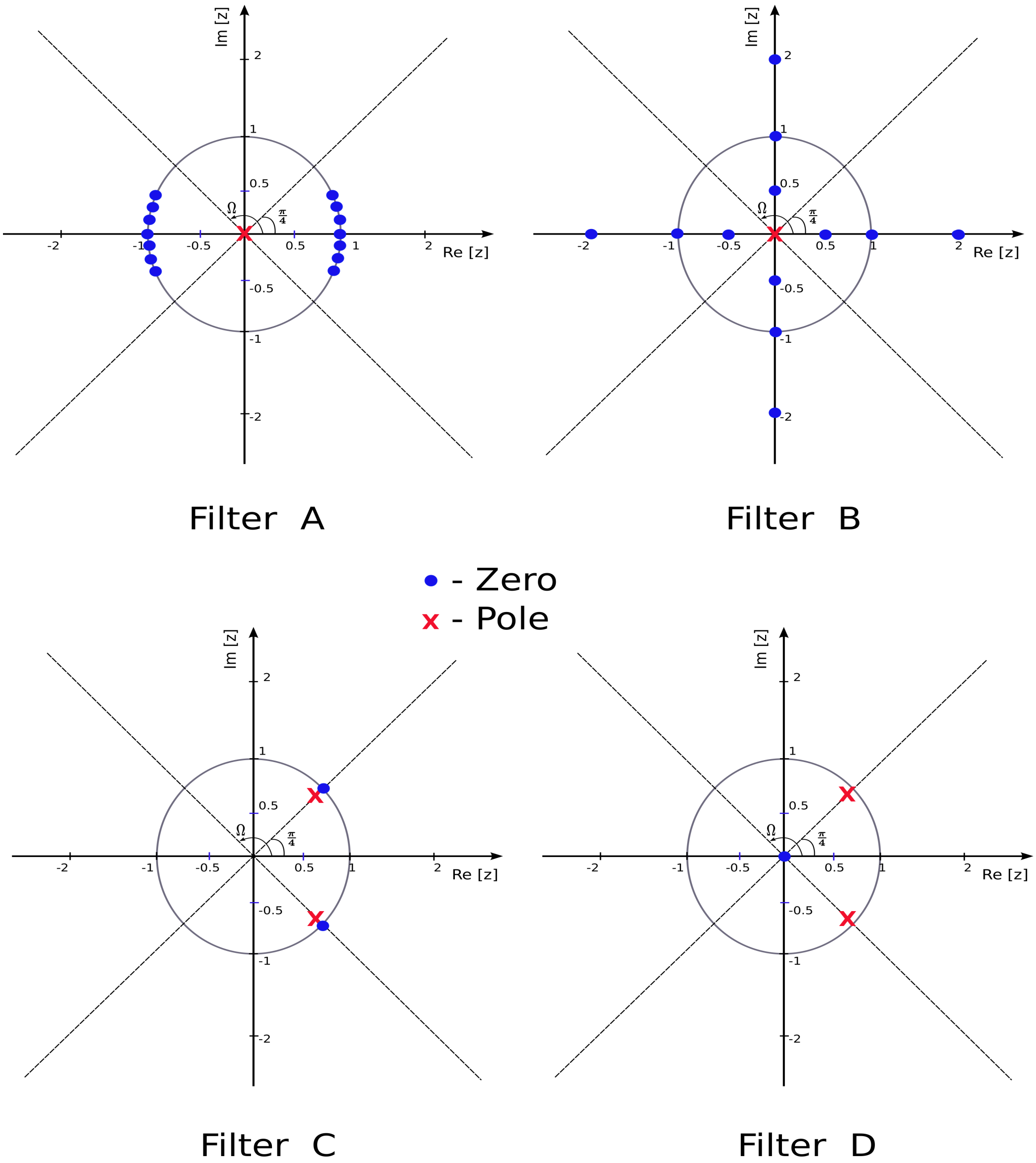
Karakteristikk:

1. *Stabilitet*: Ustabil, Marginalt stabil, Stabil
2. *Faserespons:* Minimum fase, Blandet fase, Maksimum fase
3. *Magnituderespons:* Lavpassfilter, Høypassfilter, Båndpassfilter, Notchfilter, Kamfilter, Allpassfilter, Digital resonator.
4. *Type filter:* FIR, IIR.

Reproduser og ferdigstill en tabell som gitt under.

Filter → Karakteristikk ↓	Filter A	Filter B	Filter C	Filter D
Stabilitet				
Faserespons				
Magnituderesponse				
Type filter				

(Fortsettes på side 3.)



Figur 1: Pol-nullpunktsplot

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 3 Z–Transform

a) Vis at Z–transformen ikke eksisterer for det diskrete signalet $x[n] = 1$, for $-\infty \leq n \leq \infty$. 1 p.

b) Bevis *derivasjons*-egenskapen gitt under til den tosidige Z–transformen:

$$\frac{d}{dz}X(z) = -\frac{\mathcal{Z}\{n\,x(n)\}}{z},$$

der $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,z^{-n}$. Her angir $\mathcal{Z}$ Z–transform-operatoren. 1 p.

c) Z–transformen $X[z]$ til et kausalt diskrete signal $x[n]$ er

$$X[z] = \frac{10z^3 + 40z}{z(z^2 - 2z - 3)}$$

1. Finn poler og nullpukter til $X[z]$ og angi deres orden. 1 p.
2. Bruk en passende metode (residuemetoden eller delbrøksoppspalting) til å finne det fullstendige uttrykket for $x[n]$. Evaluer $x[0]$, $x[1]$ and $x[2]$. 1 p.
3. Bruk syntetisk lang divisjon (power series expansion) til å finne verdien til $x[0]$, $x[1]$ and $x[2]$ og samhold resultatet med det du fant i 2. 1 p.

Oppgave 4 DFT

a) Fire-punkts DFT til en sekvensen $x[n]$ er gitt som

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]W_4^{nk} = 1 + W_4^{k} + 2W_4^{2k} - W_4^{3k}.$$

Finn x[n]. (Begrunn ditt valg av framgangsmåte). 1 p.

b) En fire-punkts sekvens $z[n]$ er gitt som den sirkulært flippede utgaven av $x[n]$ (beskrevet i a)), dvs

$$z[0] = x[0],\; z[1] = x[3],\; z[2] = x[2], \quad \text{og } z[3] = x[1].$$

Sekvensen $z[n]$ er deretter null-interpolert med en faktor 3 for å danne 12-punkts sekvensen $w[n] = z^{\uparrow}[n/3]$.
Finn de komplekse vediene til de seks første DFT-koeffisientene til denne sekvensen, dvs

$$W[k] = \text{DFT}\{w[n]\}, \quad k = 0 \ldots 5.$$

(Begrunn ditt valg av framgangsmåte). 2 p.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 5 IIR-filtre

Et kausalt IIR-filter med én reell pol $z_p \in \Re$ har impulsrespons:

$$h[n] = \alpha^n u[n], \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

a) Gitt systemet med impulsrespons $h[n]$, finn systemfunksjonen $H(z)$ med tilhørende ROC. Indiker polens plassering i et pol-nullpunktsplott. 1 p.

b) Finn systemfunksjonen $G(z)$ med tilhørende ROC og poler for systemet med (kompleks) impulsrespons

$$g[n] = h[n]e^{j\frac{\pi}{2}n},$$

hvor $h[n]$ er gitt i (1).
Indiker polens plassering i et pol-nullpunktsplott. 1 p.

c) Finn systemfunksjonen $H'(z)$ med tilhørende ROC og poler for systemet med impulsrespons

$$h'[n] = h[n]\cos(\frac{\pi}{2}n),$$

hvor $h[n]$ er gitt i (1).
Indiker polenes plassering i et pol-nullpunktsplott.
Forklar forskjellen på virkemåten til systemene gitt ved impulsresponsene $h[n]$ og $h'[n]$ tolket i frekvensdomenet. 1 p.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 6 Sampling og filterdesign

a)

1. Plott magnituderesponsen til et ideelt lavpassfilter. I samme plott, skisser responsen til et praktisk lavpassfilter og sett navn på de forskjellige frekvensbåndene. .5 p.
2. Finn impulsresponsen $h[n]$ til et ideelt lavpassfilter. Hva er problemet med å implementere dette filteret? Hva er en rimelig praktisk implementasjon av dette filteret? .5 p.
3. Hva er Gibbs effekt? Tegn en passende skisse for å demonstrere effekten. Ved design av filtere, hvilke nødvendige steg ville du tatt for å minimere Gibbs effekt? Tegn en passende skisse hvor du illustrerer hvordan dine steg påvirker magnituderesponsen til filteret. 1 p.
4. Hva er forsterkningen i dB til et filter hvis utgangsspenningen er 10 ganger inngangsspenningen? .5 p.

b) Et sinus-signal $x(t)$ som funksjon av t er gitt som $x(t) = \sin(10\pi t + \pi/4)$.

Lag passende skisser for å demonstrere aliasing, undersampling, oversampling, Nyquistfrekvens og folding når signalet er samplet med frekvenser:

1. $f_1 = 2.5$ Hz .5 p.
2. $f_2 = 50$ Hz .5 p.
3. $f_3 = 10$ Hz. .5 p.

Formelsamling

Cosinus av vinkler i radianer

Vinkel θ i radianer	$\cos(\theta)$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	0.866
$\frac{\pi}{4}$	0.7071
$\frac{\pi}{3}$	0.5
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	-0.5
$\frac{5\pi}{6}$	-0.866
π	-1

(Fortsettes på side 7.)

Grunnleggende sammenhenger:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{\jmath\alpha} + e^{-\jmath\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2\jmath}(e^{\jmath\alpha} - e^{-\jmath\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Konvolusjon:

$$
y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]
$$

Diskret tid Fouriertransformasjon (DTFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(\Omega) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-\jmath\Omega n} \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{\jmath\Omega n}d\Omega
\end{aligned}
$$

Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\jmath 2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{\jmath 2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1
\end{aligned}
$$

z-transformasjonen:

$$
\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}
$$