UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i INF3470/4470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag: 11. desember 2015
Tid for eksamen: 09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 7 sider.
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

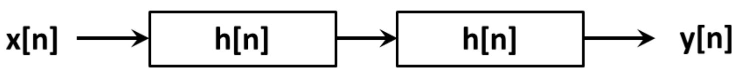
Merknad 1: Alle størrelser og figurakser skal benevnes.
Merknad 2: Les gjennom hele oppgavesettet før du begynner!

Oppgave 1 FIR filtre

Vi studerer et realiserbart FIR filter av orden M med impulsrespons $h[n]$. Passbånd- og stoppbåndfrekvensene er $\omega_p = 0.2$ rad/sample og $\omega_s = 0.3$ rad/sample. Pass- og stopbåndets rippelnivåer er $\delta_p = 0.125$ og $\delta_s = 0.1$

a)
- Hva er bredden til filterets transisjonsbånd? 0.5 p.
- Skisser magnituden til filterets frekvensrespons og indiker δ_p og δ_s på den vertikale aksen. 0.5 p.

b) Utgangen $y[n]$ fås fra inngangen $x[n]$ ved å sette to filtre med impulsrespons $h[n]$ i kaskade som vist i figuren under.



Avgjør ordenen til det effektive filteret med impulsrespons $h_{tot}[n]$ som gir $y[n]$ fra $x[n]$. Begrunn svaret. 1 p.

c) De absolutte spesifikasjonene for $h[n]$ som tilsvarer δ_p og δ_s er $A_p = 2.2$ dB og $A_s = 21$ dB. Hva er de absolutte spesifikasjonene for passbånd og stoppbånd rippelnivå for det effektive filteret beskrevet i b)? 1 p.

d) Frekvensresponsene fra $h[n]$ og $h_{tot}[n]$ er $H(e^{j\omega})$ og $H_{tot}(e^{j\omega})$.

- Gi et utrykk for fasen til $H_{tot}(e^{j\omega})$ som en funksjon av fasen til $H(e^{j\omega})$. 0.5 p.
- Hvis $H(e^{j\omega})$ er lineær fase, hva kan man si om fasen til $H_{tot}(e^{j\omega})$? Begrunn svaret. 0.5 p.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 Sampling og aliasing

La $x(t)$ være et signal med frekvensspektrum

$$X(\Omega) = 1 \quad \text{for } |\Omega| \leq 200\pi \text{ rad/s}$$
$$X(\Omega) = 0 \quad \text{for } |\Omega| > 200\pi \text{ rad/s}$$

a) Skisser frekvensspekteret til $x[n]$, den ideelt samplede versjonen av $x(t)$ med samplingfrekvens $F_s = 300$ Hz. 1 p.

b)
- Hvis $x[n]$ er en impulsrespons, hva slags filter tilsvarer det? 0.5 p.
- Er $x[n]$ i så fall realiserbart? Begrunn svaret. 0.5 p.

c) Skisser frekvensspekteret til $x[n]$, den ideelt samplede versjonen av $x(t)$ med samplingfrekvens $F_s = 150$ Hz. 1 p.

Oppgave 3 Transformanalyse av LTI systemer

Du er nylig ansatt på et forskningsprosjekt for pulsmåling av eksamenskandidater ved UiO. Dere har utviklet et kombinert sensor og dataloggingssystem som drives fra lysnettet, men dere har slurvet med hardwaredesignet og sliter veldig med mye 50 Hz målestøy fra lysnettet. Sjefen din har oppdaget at du har tatt kurs i digital signalbehandling, og vil at du skal lage et filter for å få bort denne støyen. Du synes vagt å huske at det var noe som heter notch-filter, men du var så urutinert at du solgte den gamle læreboka di. Etter desperat googling finner du følgende transferfunksjon for et notch-filter:

$$H(z) = b_0[1 - (2\cos(\phi))z^{-1} + z^{-2}] \tag{1}$$

a) Finn nullpunktene til $H(z)$ som funksjon av ϕ. Gitt at samplingsfrekvensen i systemet er $F_s = 1$ kHz, finn ϕ for å undertrykke støyen fra lysnettet. Tegn pol-nullpunktsplott for notch-filteret. 1 p.

b) Finn et utrykk for magnituderesponsen $|H(e^{j\omega})|$ til filteret og skisser denne. Du kan gjerne bruke at $b_0 = 1$ og $\cos(\phi) = 0.95$. Er filteret minimum fase? Begrunn svaret. 1 p.

c) Finn impulsresponsen og differensligningen til systemet. Anta et påtrykt inngangssignal $x[n]$. 1 p.

d) Beregn systemresponsen $y[n]$ for inngangssignalet $x[n] = s[n] + v[n]$ hvor $v[n] = A\cos(n\pi/10), n >= 0$. Kommenter det du finner. 1 p.

e) Du sliter litt med at filteret tar bort for mye av signalet i frekvensområdet rundt 50 Hz. Hva kan du gjøre for å bedre dette. Bruk pol-nullpunktsplottet og forklar kvalitativt hvordan din(e) endring(er) vil påvirke frekvensresponsen til systemet. 1 p.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4 Match systemene!

Ligninger 2 til 5 beskriver 4 systemer. Figurer 1, 2 og 3 viser tilhørende plott. I pol/nullpunktsplottene er det lagt til nullpunkter i origo for å få lik grad av teller og nevner i transferfunksjonen. Match systemene og figurene. Du kan anta at alle systemene er kausale. Angi i tillegg, når mulig, for hvert system: 5 p.

- stabilitetsegenskaper (stabilt/ustabilt/kritisk stabilt).
- faserespons (minimum fase/blandet fase/maksimum fase).
- lengden på impulsresponsen (FIR/IIR).
- type filter (notch/ kam/ digital resonator/ allpassfilter/ lavpass/ høypass/ båndpass/ båndstopp)

Merknad 1! Alle svar skal begrunnes. Tilfeldige kombinasjoner uten forklaring belønnes ikke.
Merknad 2! Ved å bruke hodet og det dere har lært i kurset, er det ikke sikkert dere trenger å beregne noe som helst i denne oppgaven!
Merknad 3! Det gis 0.33 poeng for hver riktig ligning-figur kombinasjon og 0.10 poeng for hver riktig tilleggsopplysning. Oppgaven gir maksimalt 5 poeng.

$$y[n] = 0.9\sqrt{2}y[n-1] - 0.81y[n-2] + x[n] \tag{2}$$

$$H(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M-1}(W_M^{-mk} + W_M^{mk})z^{-k}, M = 10, m = 1, W_m = e^{j2\pi/M} \tag{3}$$

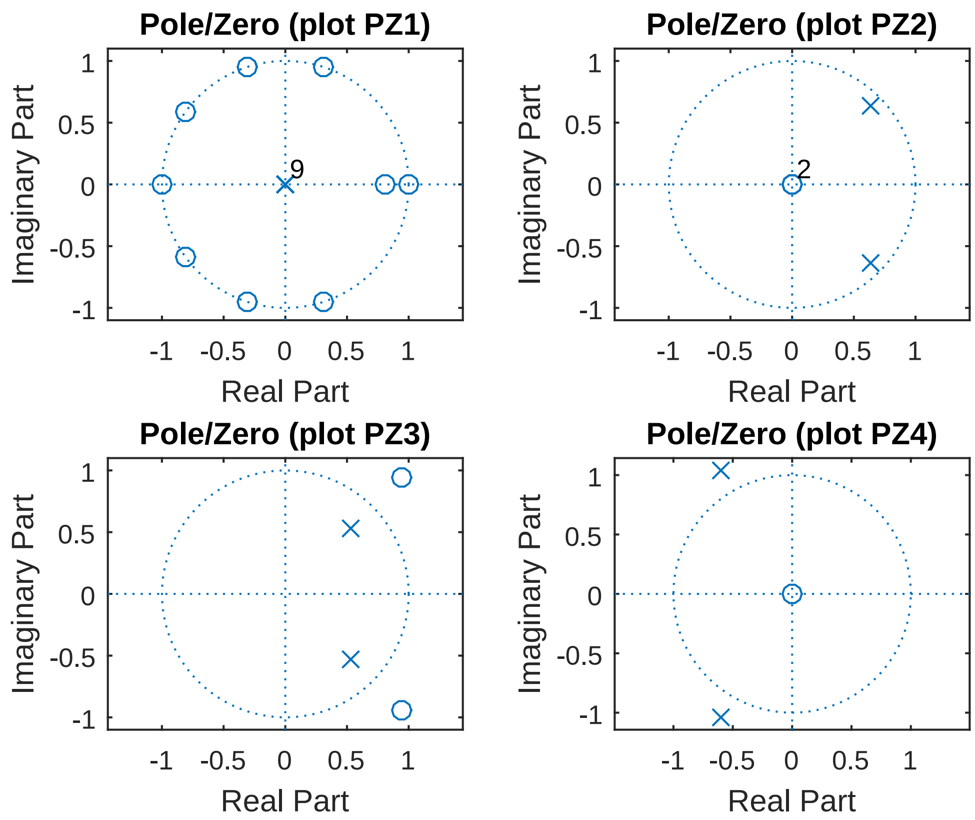
$$H(z) = \frac{(3/4)(3/4 - \sqrt{2}z^{-1}) + z^{-2}}{1 - (3\sqrt{2}/4)z^{-1} + (3/4)^2 z^{-2}} \tag{4}$$

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + (6/5)z^{-1} + (6/5)^2 z^{-2}} \tag{5}$$

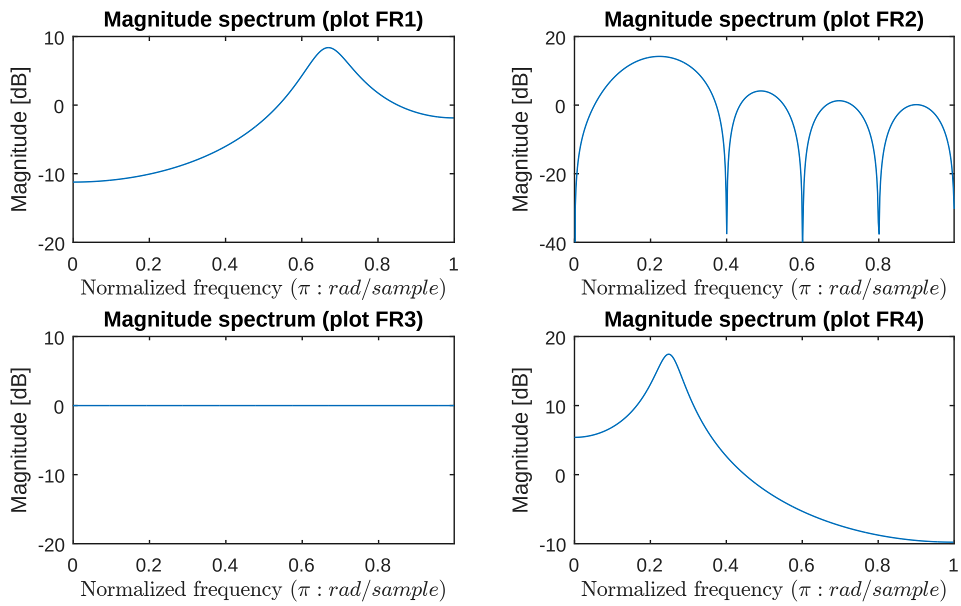
Fyll ut en tabell på følgende format (Begrunnelser og beregninger tar du utenfor tabellen):

Filter → Karakteristikk ↓	Ligning 2	Ligning 3	Ligning 4	Ligning 5
Pol/Nullpkt (figur)				
Magnituderespons (figur)				
Impulsrespons (figur)				
Stabilitetsegenskaper				
Faserespons				
Impulsrespons lengde				
Type				

(Fortsettes på side 4.)

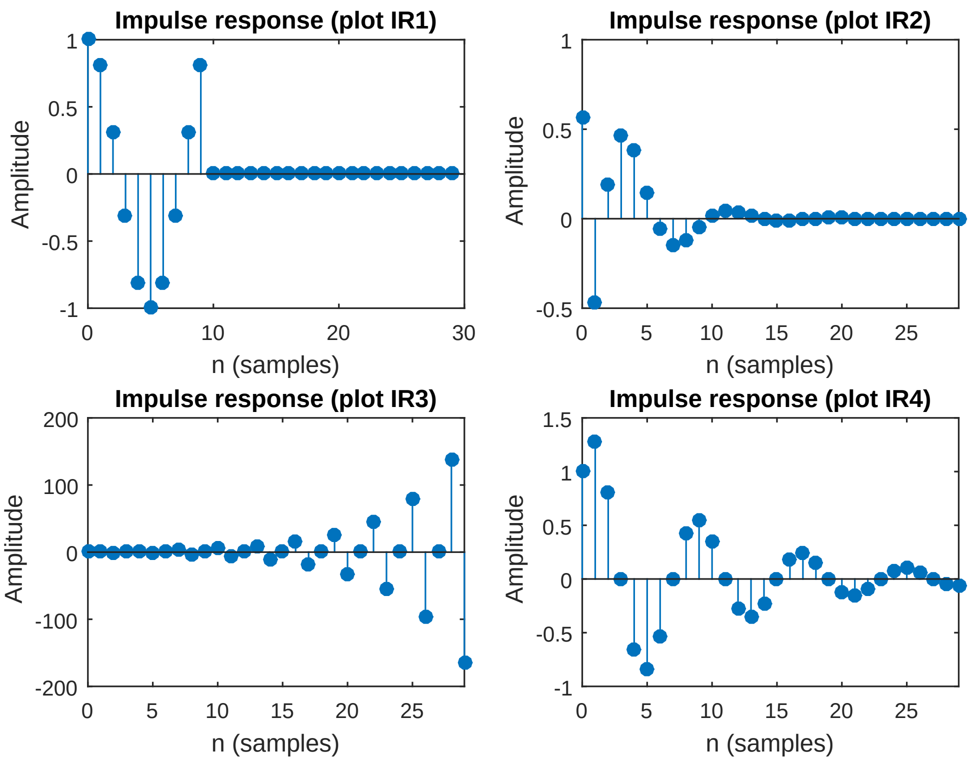


Figur 1: Pole/Zero plots



Figur 2: Magnitude spectra

(Fortsettes på side 5.)



Figur 3: Impulse responses

Oppgave 5 Lineær vs. sirkulær konvolusjon

Vi studerer to sekvenser med endelig lengde

$$x_1[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, 1, -3\}$$

$$x_2[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 2, -1, 0, 0, 4\}$$

a) Beregn den lineære konvolusjonen $x_1[n] * x_2[n]$. 1 p.

b) Beregn den 6-punkt sirkulære konvolusjonen $x_1[n] ⑥ x_2[n]$. 1 p.

c) Hva bør den minste verdien for N være for at den N-punkt sirkulære konvolusjonen skal være lik den lineære konvolusjonen? 0.5 p.

d)
- Når en filtrering operasjon beregnes på en datamaskin gjøres det som regel ved å bruke multiplikasjoner i frekvens domenet. Hva slags konvolusjon tilsvarer det? 0.5 p.
- Forklar hvorfor null-padding er en nyttig teknikk i dette tilfellet. 0.5 p.

(Fortsettes på side 6.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Lineær konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

Sirkulær konvolusjon:

$$y[n] = x[n] \circledN h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[< n-k >_N] = \sum_{k=0}^{N-1} x[< n-k >_N]h[k] = h[n] \circledN x[n]$$

Diskret tid-fouriertransformasjon (DTFT):

$$\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(\Omega) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega
\end{aligned}$$

Diskret fouriertransformasjon (DFT):

$$\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 7.)

z-transformasjonen:

$$\text{Analyse:} \qquad X(z) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$