

OPPGAVER I TRIGONOMETRI, KOMPLEKSE TALL OG GEOMETRISKE REKKER

- Ukeoppgavene skal leveres som selvstendige arbeider. Det forventes at alle har satt seg inn i instituttets krav til innleverte oppgaver:
 - Norsk versjon: <http://www.mn.uio.no/ifi/studier/admin/obliger>
- Krav til godkjenning av innleverte oppgaver er beskrevet på hjemmesiden til INF3470:
 - http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/INF3470/h12/oppgaver_krav.html

Mål

Kurset INF3470 krever en viss grad av kunnskap om matematikk, både i form av kjennskap til teori og erfaring med bruk og praktisk regning. Oppgavene her oppsummerer en del av de viktigste punktene man bør kjenne til for at resten av teorien i kurset skal bli enklere å ta til seg.

Oppgave 1 Trigonometriske funksjoner

Vekt:2

a) Plott følgende trigonometriske funksjoner under hverandre (med parallelle t-akser) for intervallet $-1 \leq t \leq 2.5$, slik at du får vist hvordan de forholder seg til hverandre mht. frekvens og faseskift.

1. $\cos(2\pi t)$
2. $\cos(2\pi t + \pi)$
3. $\cos(8\pi t)$
4. $\cos(4\pi t - \pi/3)$

b) Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur 1.

c) Bruk fasoraddisjon for å skrive følgende funksjoner på formen $\hat{A} \cos(\hat{\omega} t + \hat{\phi})$:

1. $\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi)$ $\boxed{2 \cos \frac{\phi}{2} \cos(\omega t + \phi/2)}$
2. $4 \cos(\omega t + \pi/2) + 1.5 \cos(\omega t - \pi/3)$ $\boxed{\hat{A} \approx 2.8, \hat{\phi} \approx 1.3}$
3. $\cos(\omega t + 4\pi/3) + \cos(\omega t - 5\pi/3)$ $\boxed{\hat{A} = 0}$

Oppgave 2 Diskrete trigonometriske funksjoner

Vekt:2

a) Hvilke av de følgende *diskrete* funksjonene er periodiske, og hva er periodene deres (dvs. N)?

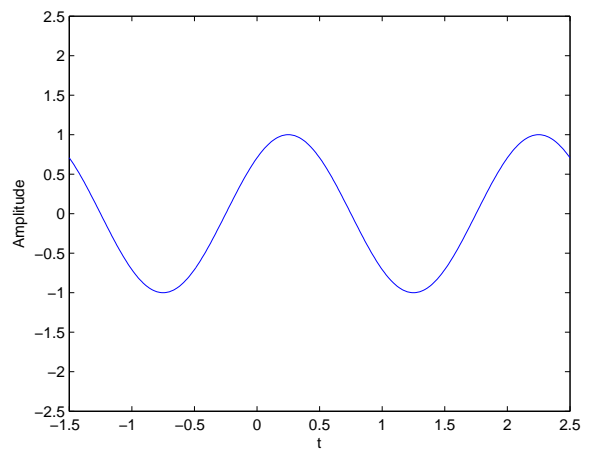
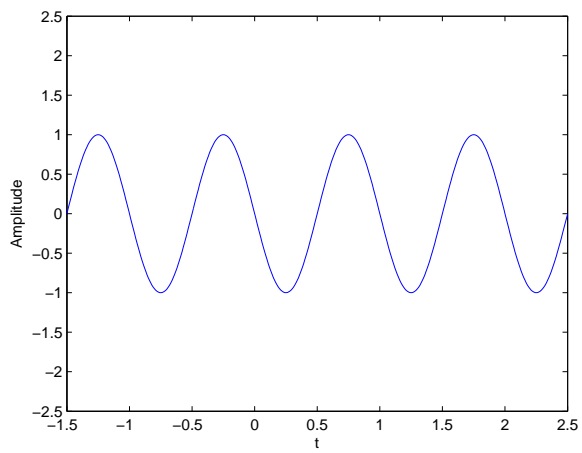
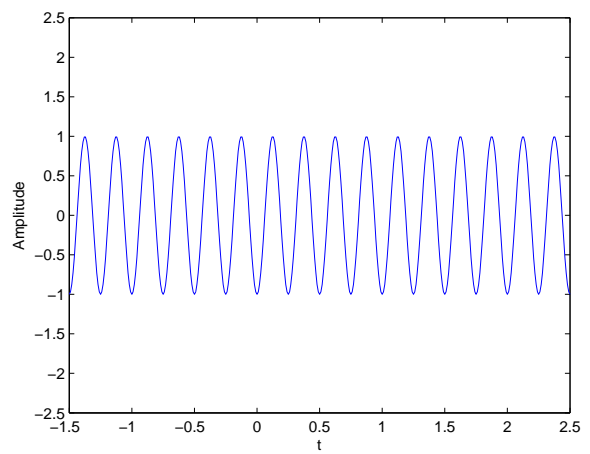
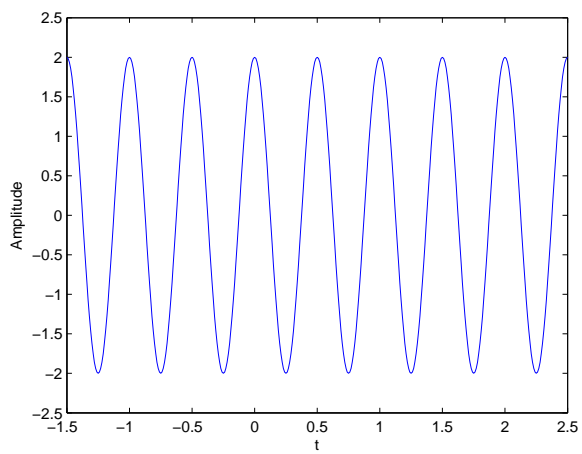
1. $\cos(0.5n + \pi/2)$ $\boxed{\text{Ikke periodisk}}$
2. $\cos(\pi n + \pi/2)$ $\boxed{\text{Periodisk}}$
3. $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi n\right)$ $\boxed{\text{Ikke periodisk}}$

b) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta 5 sampler per halve periode av en cosinus i kontinuerlig tid.

$$\boxed{\cos(\pi/5 n)}$$

c) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta sampler med avstand 1 sekunder av en cosinus i kontinuerlig tid med vinkelfrekvens 1. $\boxed{\cos n}$

d) Deloppgaven er fjernet. e) Deloppgaven er fjernet.



Figur 1: Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur.

Oppgave 3 Regning med komplekse tall

Vekt:1

a) Gjør følgende utregninger:

1. $|3 + j4|$ 5

2. $\frac{1}{3+j4}$ til kartesisk form $\frac{3}{25} - j\frac{4}{25}$

3. $\frac{1+j2}{1+e^{j\pi/2}}$ til kartesisk form $\frac{3}{2} + \frac{j}{2}$

4. $(-1)^n + e^{j\pi n}$, hvor n er et heltall $2 \cdot (-1)^n$

b) Vis at

$$(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = (\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)) \quad \text{Ref. til de Moivres formel} \quad (1)$$

Oppgave 4 Komplekse tall og det komplekse tallplanet

Vekt:1

Gitt et komplekstall på kartesisk form $z = a + jb$. Vi kaller $a = \Re\{z\}$ for realdelen til z og $b = \Im\{z\}$ for imaginærdelen til z . $j = \sqrt{-1}$ er den såkalte imaginære enheten. (Merk at den imaginære enheten kalles ofte j i fysiske fag som dette, og i i matematiske fag som kompleks analyse.)

a) Et komplekstall på kartesisk form kan representeres i det kartesiske koordinatsystemet som punktet (a, b) . Et annet koordinatsystem er det polare, der de to koordinatene (r, θ) angir hhv. avstand fra origo og vinkel mot førsteaksen. Lag en skisse og bruk trigonometri for å finne (r, θ) fra (a, b) .

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) En vanlig operasjon på komplekse tall er å komplekskonjugere: $z^* = (a + jb)^* = a - jb$. Dette tilsvarer å snu fortegnet på imaginærdelen. Hva slags geometrisk operasjon tilsvarer dette i det kartesiske koordinatsystemet? $\cos\theta + j\sin(-\theta)$

c) Gi en tolkning av $(e^{j\theta})^k$ i koordinatsystemet. Skisser for $k = 1, 2, 3$ og valgfri θ . Hva må θ være for at $(e^{j\theta})^k = 1$? $\cos\theta k + j\sin\theta k$

Oppgave 5 Regning med komplekse tall

Vekt:2

a) Regn ut følgende for polar ($z = re^{j\theta}$) og/eller kartesisk ($z = a + jb$) form som angitt:

1. z^* på polar form $re^{-j\theta}$

2. zz^* på polar og kartesisk form (hva er dette det samme som?) $a^2 + b^2 = r^2$

3. z^k på polar form $r^k e^{j\theta k}$

4. $z + z^*$ på polar og kartesisk form $2r \cos\phi$

5. $z - z^*$ på polar og kartesisk form $2jr \sin\phi$

6. $\frac{1}{2}(z + z^*)$ på polar og kartesisk form $r \cos\theta$

7. $\frac{1}{2j}(z - z^*)$ på polar og kartesisk form $r \sin\theta$

8. z^{-1} på polar og kartesisk form (**Merk:** oppgaven er å finne c og d slik at $c + jd = \frac{1}{a+jb}$, samt s og ϕ slik at $se^{j\phi} = \frac{1}{re^{j\theta}}$.)

$$\frac{a - jb}{a^2 + b^2}, \frac{1}{r} e^{-j\phi}$$

9. Bruk punktene over for å finne et uttrykk for $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$ ved komplekse eksponentialer.

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

10. Hva er mengden av alle punkter som kan beskrives med det komplekse eksponentialet $z = e^{j\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$?

Enhetssirkelen i det komplekse talplanet

11. Hva er forskjellen på z^{-1} og z^* ?

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

b) Skriv følgende tall som komplekse tall på polar form (k er et vilkårlig heltall):

1. 1 $1e^{j \cdot 2\pi k}$

2. -1 $1e^{j(\pi+n \cdot 2\pi)}$

3. $(-1)^k$ $1e^{jk\pi}$

4. j^k $1e^{jk\pi/2}$

Oppgave 6 Geometriske rekker

Vekt:2

a) Beregn verdien til følgende endelige geometriske rekker:

1. $\sum_{k=0}^{100} 23^k$ $\frac{1 - 23^{101}}{1 - 23} = 1.56 \cdot 10^{136}$

2. $\sum_{k=5}^{19} (4.5)^k$ $\frac{4.5^5 - 4.5^{20}}{1 - 4.5} = 3.31 \cdot 10^{12}$

b) Bestem hvilke av de følgende uendelige geometriske rekkene som konvergerer, og beregn verdien til disse:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$ Konvergerer ikke

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{a}\right)^k, a > 4$ Konvergens

3. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}$ Konvergerer ikke

4. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}$ Konvergerer

c) Finn konvergensområdet til følgende uendelige geometriske rekker:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k, x \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} (x^{-1})^k, x \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{1}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ or } x < -1$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k, z \in \mathbb{C}$ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$

4. $\sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k, x \in \mathbb{R}$ $-1 < x < 1$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k}, z \in \mathbb{C}$ $|z| > 2$