INF3470 Digital signalbehandling

Repetisjon av komplekse tall og sinuser

Sverre Holm

UNIVERSITETET I OSLO

Mål

1. Beherske regneoperasjoner med komplekse tall.
2. Beherske regneoperasjoner med trigonometriske funksjoner.
3. Huske og forstå de fleste trigonometriske identiteter.

NB:

- Dette danner grunnlaget for hele kurset,
- Selv om det ikke er "pensum" - så bruk mye tid på øvelser!
- Det forventes at dere kan dette fra tidligere kurs.

Komplekse tall: Grunnleggende

- $z=a+jb$ med koeffisienter a,b
  - $a = \mathrm{Re}\{z\}$ er realdelen til z
  - $b = \mathrm{Im}\{z\}$ er imaginærdelen til z
  - j = roten av -1, ($j^2 = -1$): den imaginære enheten

- i eller j
  - Opprinnelig var *i* for imaginær: matematikk
  - I elektrofag er *i* strøm, derfor brukes heller *j*

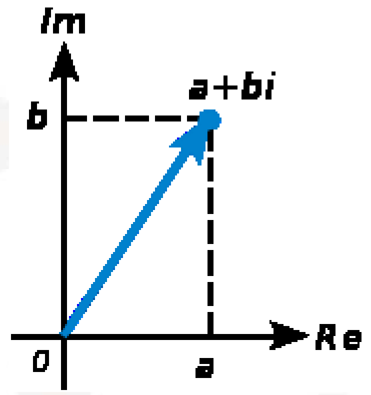
Komplekse tall: Sum og produkt

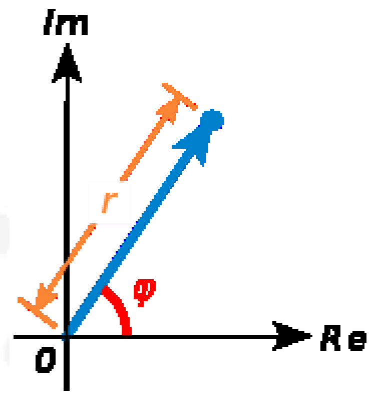
Regning følger vanlig aritmetikk – husk $j^2 = -1$

- Gitt $z_1 = a_1 + jb_1$, $z_2 = a_2 + jb_2$
- Sum: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- Produkt: $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Komplekse tall: Visualisering og koordinatsystemer

- Reelle tall: et punkt på en tall-linje
- Komplekse tall: et punkt i planet.
- Regneoperasjoner kan da tolkes som vektor-operasjoner.
- To mulige koordinatsystemer i planet:
  - kartesiske koordinater
  - polar-koordinater



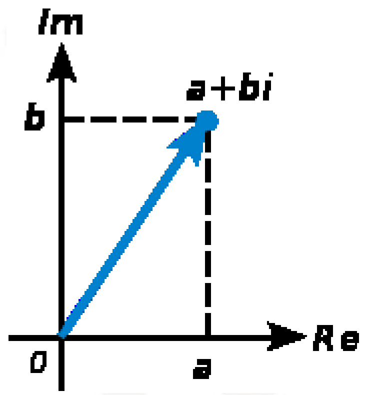


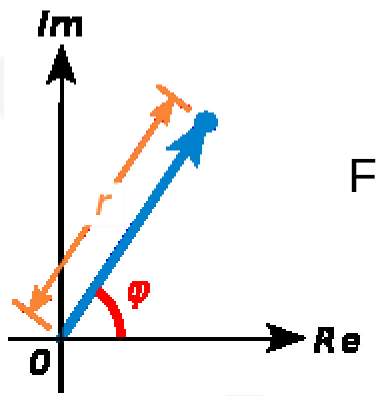
Wikipedia

Komplekse tall på polar form

- $z = r\, e^{j\phi}$
- Tallverdi, magnitude:
  $r = (a^2 + b^2)^{1/2} = |z|$
- Fase:
  $\theta = \tan^{-1}(b/a) = \mathrm{ang}\{z\}$

- Gir enkel multiplikasjon:
  - $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$

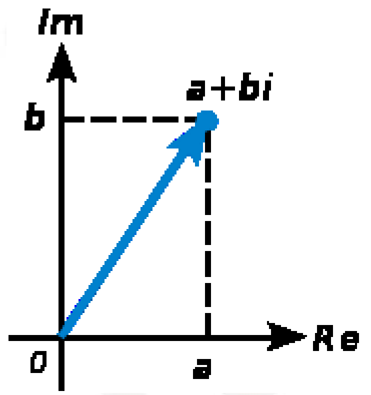




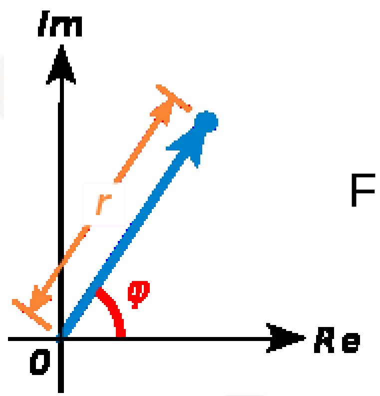
Fra Wikipedia

Komplekse tall på kartesisk form

- $z = a + jb$
- Realdel:
  $a = r\cos(\phi) = \mathrm{Re}\{z\}$
- Imaginærdel:
  $b = r\sin(\phi) = \mathrm{Im}\{z\}$



- Gir enkel addisjon
  - $z_1+z_2 =$
    $a_1+a_2 + j(b_1+b_2)$



Fra Wikipedia

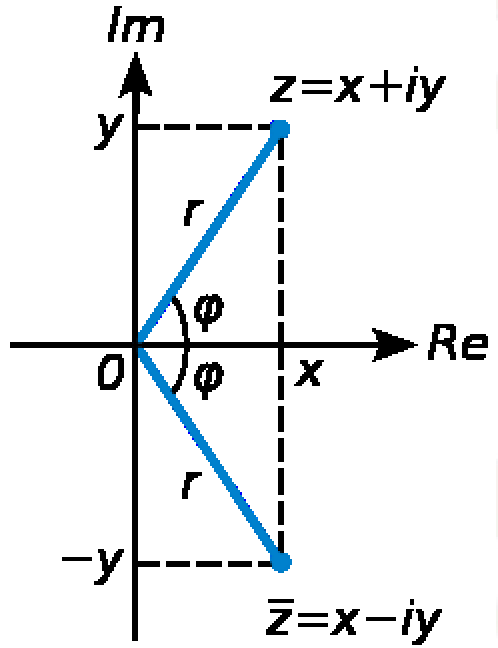
Komplekse tall: komplekskonjugering

Kartesisk form:

$z^* = (x + jy)^* = x - jy$

Polar form:

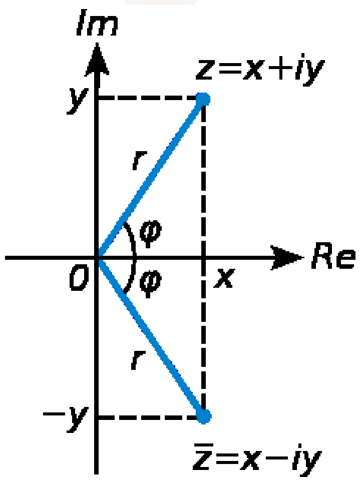
$z^* = (r\, e^{j\phi})^* = re^{-j\phi}$



Fra Wikipedia

Komplekse tall: komplekskonjugering

Multiplikasjon med komplekskonjugert, (kvadrert norm):
$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = |z|^2$



Addisjon med komplekskonjugert:
$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\mathrm{Re}\{z\}$

Subtraksjon med komplekskonjugert:
$z - z^* = (a + jb) - (a - jb) = 2jb = 2j\,\mathrm{Im}\{z\}$

Komplekse tall og trigonometri

Eulers identiteter for sinus og cosinus:

- $(e^{j\phi} + e^{-j\phi})/2 = \cos\phi$ addisjon av k. konj.
- $(e^{j\phi} - e^{-j\phi})/2j = \sin\phi$ subtraksjon av k. konj

Generell (tidsavhengig) cosinus-funksjon:

- $A\cos(2\pi ft + \phi) = (A/2)\,(e^{j2\pi ft}\, e^{j\phi} + e^{-j2\pi ft}\, e^{-j\phi})$
- En cosinus med frekvens *f* og fase ϕ kan tolkes som summen av to komplekse eksponensialer.

Komplekse tall og trigonometri

- $\cos^2\phi + \sin^2\phi = ?$

- $[(e^{j\phi} + e^{-j\phi})/2]^2 + [(e^{j\phi} - e^{-j\phi})/2j]^2 =$
  $(¼)[e^{j2\phi} + 2 + e^{-j2\phi}] - (¼)[e^{j2\phi} - 2 + e^{-j2\phi}] = 1$

- Meget viktig resultat som er veldig lett å utlede med komplekse eksponensialer, ikke så lett uten.

- Tilsvarende lett å finne $\cos(2\phi)$, $\sin(2\phi)$, $\cos(\phi/2)$ osv

Komplekse tall og trigonometri

Eksempel 1: Modulasjon

- $\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) = (1/2)(\cos(\phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2))$

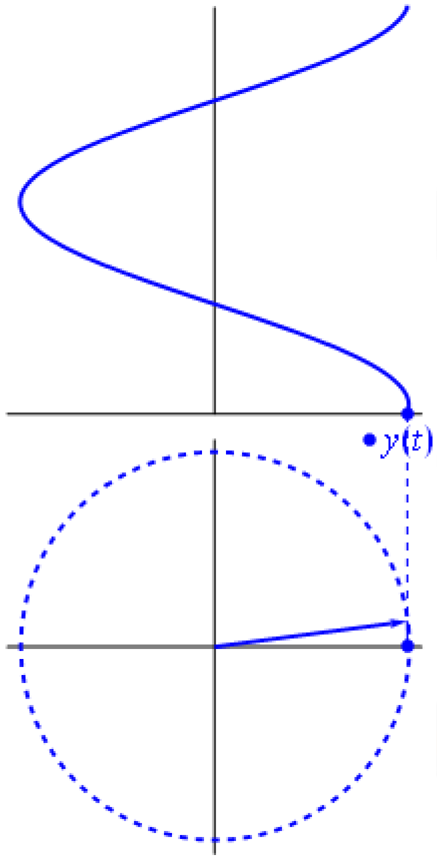
Eksempel 2: Sum av sinuser med samme frekvens

- $\sum_k A_k\cos(2\pi ft + \phi_k) = A\cos(2\pi ft + \phi)$
  der $Ae^{j\phi} = \sum_k \{A_k e^{j\phi_k}\}$

Eksponensialform er mye enklere å bruke for regning i disse eksemplene.

Kompleks amplitude (fasor)

$$A \cdot \cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\left\{A \cdot e^{i(\omega t + \theta)}\right\}$$
$$= \mathrm{Re}\left\{A e^{i\theta} \cdot e^{i\omega t}\right\}.$$



- http://en.wikipedia.org/wiki/Phasor

Kompleks amplitude (fasor)-addisjon

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\omega t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega t + \theta_2) &= \mathrm{Re}\{A_1 e^{i\theta_1} e^{i\omega t}\} + \mathrm{Re}\{A_2 e^{i\theta_2} e^{i\omega t}\} \\ &= \mathrm{Re}\{A_1 e^{i\theta_1} e^{i\omega t} + A_2 e^{i\theta_2} e^{i\omega t}\} \\ &= \mathrm{Re}\{(A_1 e^{i\theta_1} + A_2 e^{i\theta_2}) e^{i\omega t}\} \\ &= \mathrm{Re}\{(A_3 e^{i\theta_3}) e^{i\omega t}\} \\ &= A_3 \cos(\omega t + \theta_3), \end{aligned}$$

- Finn real- og imaginær-deler (linje 3) og dermed:

$$A_3^2 = (A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2)^2 + (A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2)^2,$$

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2}{A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2}\right)$$

Eksponensialfunksjoner

- $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
- $1/z^n = z^{-n}$
- Hva er $(2+j)^{-2}$
  - I slike oppgaver skal svaret alltid på form a+jb

Geometriske rekker

- Viktige formler for sum av konvergent geometrisk rekke, brukes mye:

$$\sum_{m=0}^{M-1} \alpha^m = \begin{cases} \frac{1-\alpha^M}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ M & \alpha = 1 \end{cases} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m = \frac{1}{1-\alpha}, |\alpha| < 1$$

- Formel for endelig rekke er utledet i fasit til oppgavesett 1
- La M $\Rightarrow \infty$ for å få formel for uendelig rekke