UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

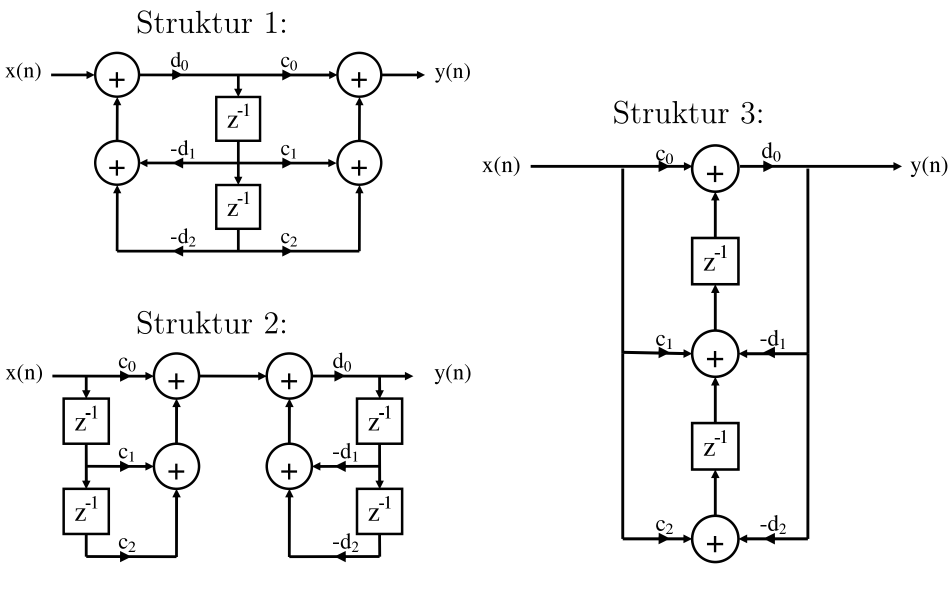
Eksamen i	INF3440/4440 — Signalbehandling
Eksamensdag:	9. desember 2005
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Strukturer

To systemfunksjoner, $G(z)$ og $H(z)$, er gitt som følger:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1/d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}} \\
\text{og} \quad H(z) &= \frac{1/d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}.
\end{aligned}
$$



Figur 1: Filterstrukturer

Figur 1 viser 3 forskjellige filterstrukturer. For filterstruktur 1-3, avgjør om strukturen implementerer filteret beskrevet av systemfunksjon $G(z)$, $H(z)$ eller eventuelt et annet filter. (2/3 poeng for hvert riktig svar.)

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 Systemer

Likning S_1 til S_7 beskriver 7 systemer. Figur 2 viser 6 frekvensresponser, 4 pol-nullpunkts plott og 2 fase plott. Avgjør hvilke 6 systemer som hører til de 6 frekvensresponsene, hvike 4 systemer som hører til de 4 pol-nullpunkts plottene og hvilke 2 systemer som hører til de to fase plottene. (0.25 poeng for hvert riktig svar.)

$$
\begin{aligned}
S_1 &: \; y[n] = 0.77y[n-1] + x[n] + x[n-1] \\
S_2 &: \; y[n] = 0.77y[n-1] + 0.77x[n] - x[n-1] \\
S_3 &: \; H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.77z^{-1}} \\
S_4 &: \; H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} \\
S_5 &: \; H(z) = 3 - 3z^{-1} \\
S_6 &: \; y[n] = \sum_{k=0}^{7} x[n-k] \\
S_7 &: \; y[n] = x[n] - x[n-1] + x[n-2] - x[n-3] + x[n-4] - x[n-5]
\end{aligned}
$$

Oppgave 3 Ymse

a) z-transformen har shift egenskap (time shifting). Bruk denne egenskapen til å vise at z-transformen til konvolusjonen $y[n] = x[n] * h[n]$ er lik produktet av z-transformen til $x[n]$ og $h[n]$, dvs $Y(z) = X(z)H(z)$, der $X(z)$ er z-transformen til $x[n]$ og $H(z)$ er z-transformen til $h[n]$. 1 p.

b) Anta at en diskret-tid sekvens $x[n]$ er båndbegrenset slik at

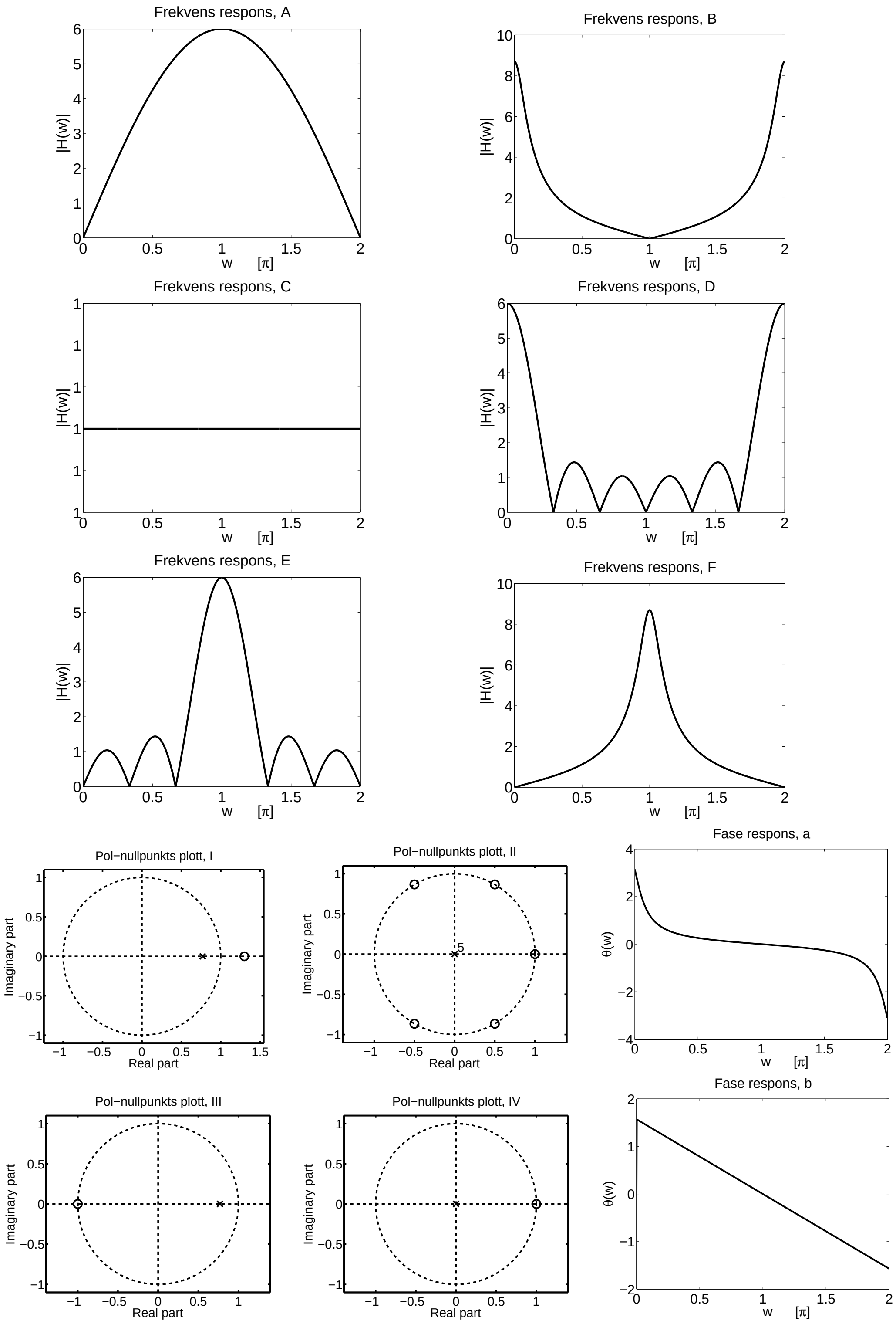
$$X(w) = 0 \qquad 0.15\pi < |w| < \pi.$$

$y[n]$ er dannet ved å sample $x[n]$ ved at

$$y[n] = x(nN),$$

hvor N er et heltall. Finn den største verdien N kan ha som sikrer at $x[n]$ kan bli unikt rekonstruert fra $y[n]$. Skisser og forklar. 1 p.

(Fortsettes på side 3.)



Figur 2: Plott av 6 frekvensresponser, 4 pol-nullpunkts plott og 2 fase plott

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4 Filter design

I denne oppgaven skal du designe et enkelt reelt diskret filter som slipper igjennom frekvensen $w = \pi/4$ uten demping og stopper frekvensen $w = \pi/2$.

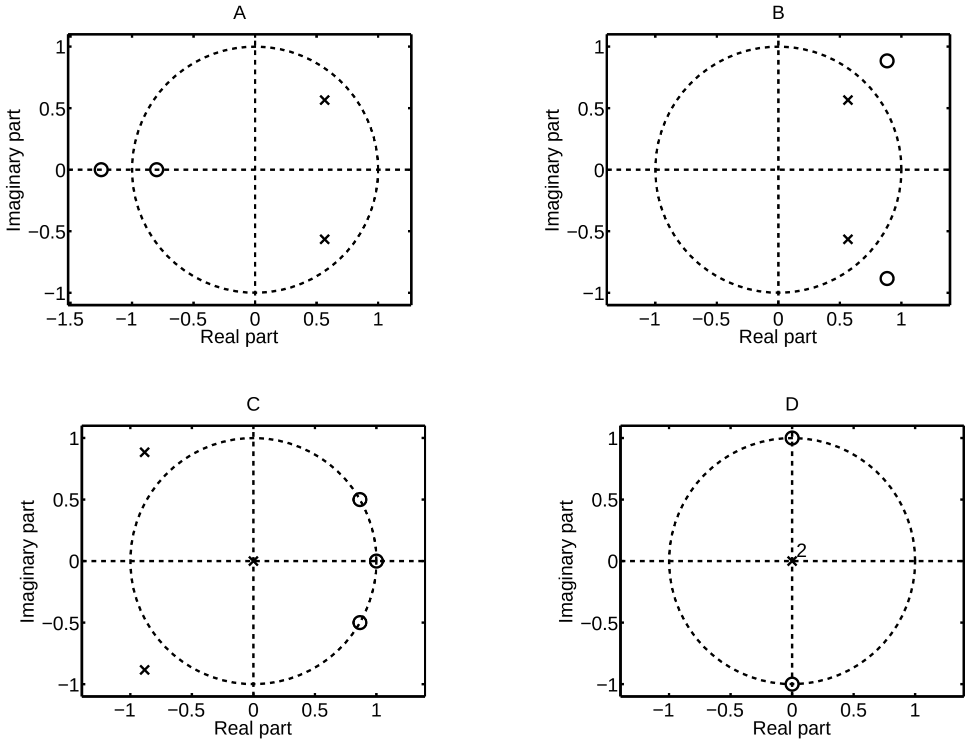
a) Hvilke krav gir dette til filterets frekvensrespons, $H(w)$. 1 p.

b) Bestem filterets systemfunksjon, $H(z)$. 2 p.

c) Hva blir filterets impulsrespons, $h(n)$. 1 p.

Oppgave 5 Følger av pol-nullpunkts plassering

Fire kausale filtre navngitt A, B, C og D beskrives av pol-nullpunkts diagram gitt i figur 3. Besvar de følgende spørsmålene relatert til de fire filtrene:



Figur 3: Fire pol-nullpunktsdiagram

a) Hvilket filter er et båndstopp filter? 0.4 p.

b) Hvilket filter er ikke stabilt? 0.4 p.

c) Hvilket filter har endelig impulsrespons? 0.4 p.

d) Hvilket filter har lineær fase? 0.4 p.

e) Hvilket filter er et allpassfilter? 0.4 p.

(Fortsettes på side 5.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{for } a \neq 1 \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Konvolusjon:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = h(n) * x(n)$$

Diskret tids Fourier transform (DTFT):

$$\text{Analyse:} \qquad X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}$$

$$\text{Syntese:} \qquad x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw$$

Diskret Fourier transform (DFT):

$$\text{Analyse:} \qquad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\text{Syntese:} \qquad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

z-transform:

$$\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Lykke til!!!