UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3440/4440 — Signalbehandling
Eksamensdag:	11. desember 2006
Tid for eksamen:	15.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Et IIR filter er definert ved følgende differanselikning

$$y[n] = -0.9y[n-5] + x[n].$$

a) Bestem systemfunksjonen, $H(z)$, for dette systemet og lag et pol-nullpunkts plott. 1 p.

b) La inngangsignalet til filteret være gitt som 1 p.

$$x[n] = \begin{cases} +1, & \text{for } n = 0, 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

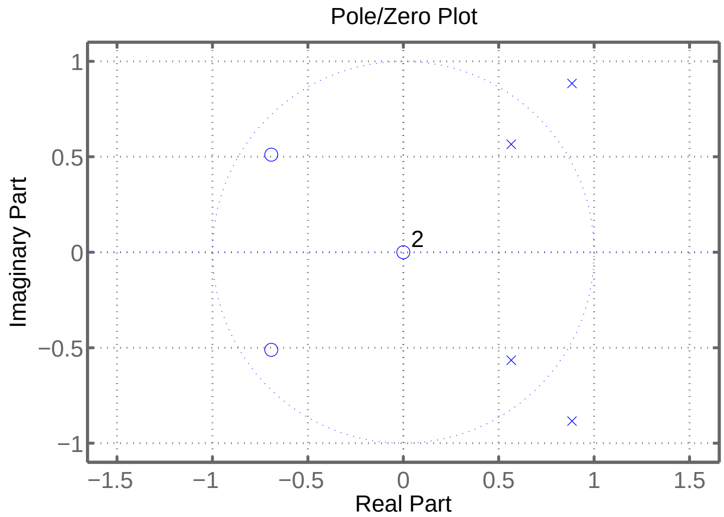
og anta at utgangssignalet $y[n] = 0$ for $n < 0$.
Bestem utgangssignalet $y[n]$ for $n \geq 0$. Er utgangssignalet periodisk for $n \geq 0$, og hva er i tilfelle den fundamentale perioden?

c) Skisser magnituderesponsen til filteret. (Pass på å få med akser og benevning). 1 p.

Oppgave 2

(Fortsettes på side 2.)

Gitt et filter med pol-nullpunkt plott som vist under.



Drøft og begrunn filterets egenskaper. 2 p.

Oppgave 3

Fra en stokastisk stasjonær prosess X har vi N sampler; $x[n]$, $n = 1..N$. Vi ønsker å finne et estimat på effekt-tetthetsspekteret $\Gamma_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[m] e^{-\jmath 2\pi f m}$, der $\gamma_{xx}[m] = E\{x^*[n]x[n+m]\}$.

a) Vi antar først at vi bruker en ikke-parametrisk metode for å estimere effekt-tetthetsspekteret. Hvordan vil en liten verdi for N innvirke på egenskapene til estimatorene Periodogram og Bartletts metode (midlede Periodogram)? Begrunn ditt svar. 1 p.

b) Et alternativ til ikke-parametriske metoder ville være å bruke en parametriske estimator. I forhold til metodene diskutert i a), hvilke fordeler og ulemper vil man få ved å benytte en AR modell til effekt-tetthetsspekter estimering? Begrunn ditt svar. 1 p.

Oppgave 4: Flervalgsoppgaver

I de følgende 5 deloppgavene er det gitt flere svaralternativer, kun ett av disse er riktig. Du må angi ett og bare ett svaralternativ for hver deloppgave. Rett svar gir 1 poeng, galt svar gir -1/3 poeng, åpent svar gir 0 poeng. Gardering (mer enn ett svar på en deloppgave) gir 0 poeng.

Oppgave 4.1

Figur 1 viser en anvendelse av multi-rate signalbehandling, kalt en *filterbank*, som blir brukt i f.eks. MP3-koding. Filterbanken splitter et innsignal $f[n]$ (som her antas samplet ved laveste frekvens som tilfredsstiller Shannons samplingsteorem) opp i 4 delsignaler $f_1[n], f_2[n], f_3[n]$ og $f_4[n]$. Filtrene 1 p.

(Fortsettes på side 3.)

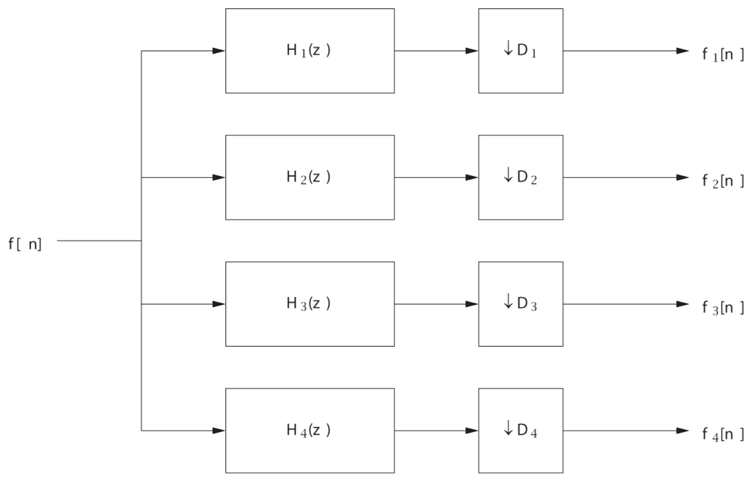
$H_1(z), \cdots, H_4(z)$ er ideelle båndpass-filtre med magnituderespons som vist i figur 2. Disse filtrene blir brukt til å båndbegrense de 4 delsignalene. Anta at nedsamplingsfaktorene $D_1, \cdots, D_4$ velges slik at hvert delsignal er samplet med laveste samplingsrate som tilfredsstiller Shannons samplingsteorem. Avgjør om summen av antall sampler pr. sekund for signalene $f_1[n], \cdots, f_4[n]$ er, i forhold til antall sampler pr. sekund for signalet $f[n]$:

a) Større.

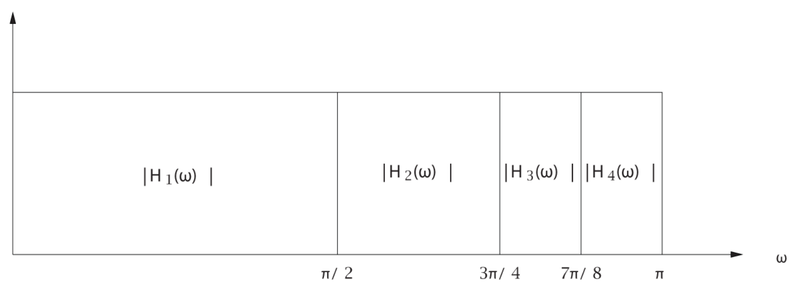
b) Like stort.

c) Mindre.

d) Dette er umulig å avgjøre ut fra informasjonen gitt i oppgaveteksten.



Figur 1: Oppgave 4.1



Figur 2: Oppgave 4.1

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4.2

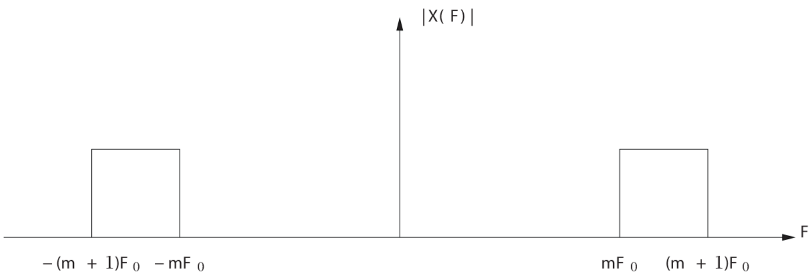
Gitt et signal $x(t)$ i kontinuerlig tid, med magnitudespektrum $|X(F)|$ som vist i figur 3. Hva er minste tilstrekkelige samplingsrate for dette signalet? 1 p.

a) $2(m+1)F_0 - 2mF_0$

b) $2mF_0 + 2F_0$

c) $2[(m+1)F_0 + mF_0]$

d) $(2m+1)F_0$



Figur 3: Oppgave 4.2

Oppgave 4.3

I multi-rate signalbehandling kan vi endre samplingsraten fra f_s til en vilkårlig brøk $\frac{I}{D} f_s$ ved å kombinere oppsampling med en faktor I og nedsampling med en faktor D. Hvis I og D er store tall som ikke er primtall ($I = I_1 I_2 \cdots I_M$, $D = D_1 D_2 \cdots D_N$), så er det mulig å gjennomføre oppsampling og nedsampling i hhv. M og N steg. Under er det gitt fire ulike implementasjoner som alle endrer samplingsraten fra f_s til $\frac{16}{25} f_s$, der $H_m(z)$ er et lavpassfilter med knekkfrekvens π/m. Hvilken av implementasjonene har minst tap av informasjon gitt et inn-signal der f_s tilsvarer Nyquist-raten? 1 p.

a) $\rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow$

b) $\rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_4(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow$

c) $\rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_4(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow$

d) $\rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_4(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_4(z)} \rightarrow$

e) Det er umulig å avgjøre uten mer informasjon om signalet.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 4.4

Gitt et filter $h[n]$ med systemfunksjon $H(z) = \frac{1-1.6z^{-1}+z^{-2}}{1-1.5z^{-1}+0.8z^{-2}}$. Hvor mye forsterker dette filteret dc-komponenten (dvs. komponenten med frekvens $f = 0$) i et signal? 1 p.

a) 0

b) 1.33

c) 1

d) 1.6

Oppgave 4.5

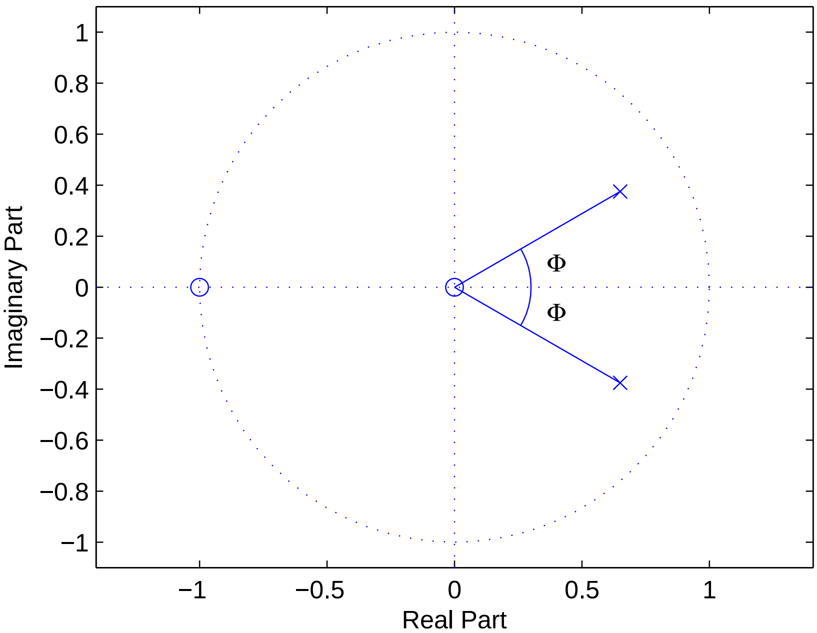
Et filter har pol-nullpunkts plott som gitt i figur 4. Hvilken av følgende differanselikninger beskriver dette systemet? 1 p.

a) $y[n] = -4.7880y[n-1] - 0.5630y[n-2] + x[n] + x[n-1]$

b) $y[n] = 1.2990y[n-1] - 0.5625y[n-2] + x[n] + x[n-1]$

c) $y[n] = -1.7190y[n-1] - 0.5620y[n-2] + x[n] + x[n-1]$

d) $y[n] = 2.5y[n-1] - 0.5610y[n-2] + x[n] + x[n-1]$



Figur 4: Oppgave 4.5

(Fortsettes på side 6.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{for } a \neq 1 \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Konvolusjon:

$$
y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = h(n) * x(n)
$$

Diskret tids Fourier transform (DTFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} \\
\text{Syntese:} \qquad x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw
\end{aligned}
$$

Diskret Fourier transform (DFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \\
\text{Syntese:} \qquad x(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1
\end{aligned}
$$

z-transform:

$$
\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}
$$

(Fortsettes på side 7.)

Noen vanlige z-transform par:

Signal, $x[n]$	z-transform, $X(z)$	*ROC*
$\delta[n]$	1	Alle z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$

Forventning og varians

$$\text{Forventning:} \quad E\{x(\zeta)\} \equiv \mu_x = \begin{cases} \sum_k x_k p_k & x(\zeta) \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx & x(\zeta) \text{ kontinuerling} \end{cases}$$

$$\text{Varians:} \quad \text{var}[x(\zeta)] = \sigma_x^2 = \gamma_x^{(2)} = E\{[x(\zeta) - \mu_x]^2\}$$

Lykke til!!!