UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3470/4470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	12. desember 2016
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merknad 1: Alle størrelser og figurakser skal benevnes.
Merknad 2: Les gjennom hele oppgavesettet før du begynner!

Oppgave 1 Signaler og systemer - Hummer og kanari

a)
- Er en diskret sinusfunksjon $\cos(\omega_0 n + \phi)$ alltid periodisk? Begrunn svaret.
- Er $\cos(\pi^2 n + \pi/4)$ periodisk? Begrunn svaret.

1.0 p.

b) Gitt $y[n] = \log(|x[n]|)$. Er systemet:

- Lineært?
- Tidsinvariant?
- Kausalt?
- Stabilt?

Svarene skal begrunnes! 1.0 p.

c) Gitt impulsresponsen $h[n] = \{4, \underline{3}, 3, -2, 0\}$

- Er filteret kausalt?
- Uttrykk $h[n]$ ved hjelp av enhetssprang (unit step) funksjoner
- Finn energien til $h[n]$
- Finn $h[-n+1]$

1.0 p.

d) Nå skal vi se litt på responstyper.

(Fortsettes på side 2.)

- Forklar begrepene transient og stasjonær respons.
- Hvilke betingelser må være oppfylt for at vi skal kunne bruke frekvensanalyse (finne $H(e^{j\omega})$) på et LTI system?
- Kan man bruke frekvensanalyse til å finne den transiente responsen? Begrunn svaret. 1.0 p.

e) Signalforvrengning

- Forklar hva som menes med forvrengning av et signal.
- Hva betyr det at et system har konstant forsterkning?
- Hva betyr det at et system har lineær fase?
- Hvorfor er lineær fase viktig for å hindre signalforvrengning? Forklar gjerne med utgangspunkt i $y[n] = A_x|H(e^{j\omega})|\cos(\omega n + \phi_x + \angle H(e^{j\omega}))$.

1.0 p.

Oppgave 2 Frekvensanalyse av LTI systemer

a) Gitt differensligningen $y[n] - ay[n-1] = x[n] - bx[n-1]$, hvor a og b er reelle konstanter.

- Finn systemets transferfunksjon $H(z)$.
- Når er systemet kausalt, stabilt og har minimum fase?

1.5 p.

b) Gitt at filteret i a) er kausalt og stabilt.

- Gjør rede for magnituderesponsen til filteret (lavpass, høypass, allpass) for ulike valg av konstanten b, når du kan anta at $a = 0.8$. Bruk gjerne pol-nullpunktsplott for å begrunne svaret.

1.5 p.

c) Gitt at filteret i a) er kausalt og stabilt.

- Vis at impulsresponsen er gitt ved

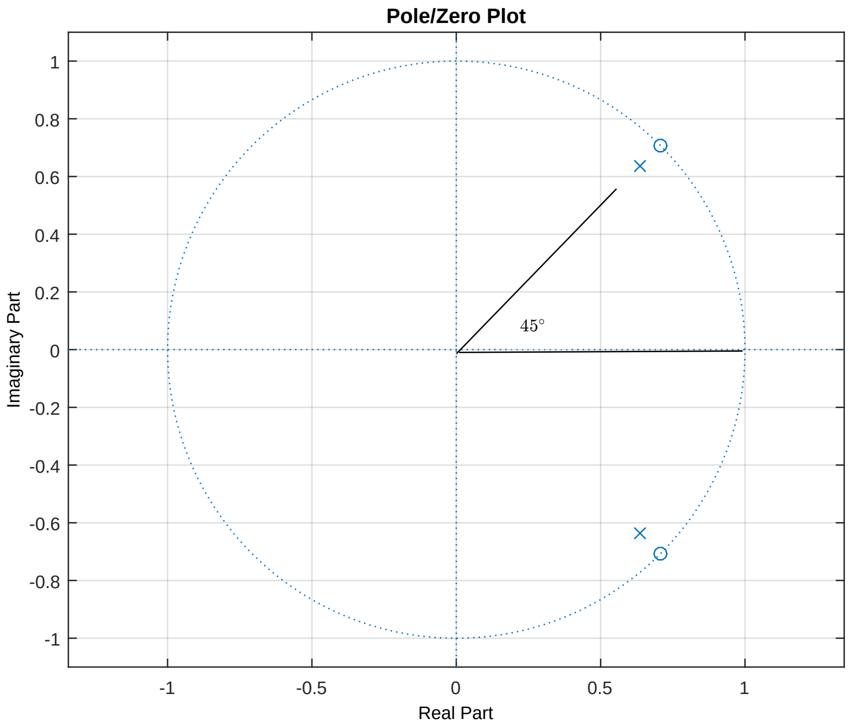
$$h[n] = \begin{cases} 0, n < 0 \\ 1, n = 0 \\ (a-b)a^{n-1}, n > 0. \end{cases}$$

Hint: Systemet kan skrives som en sum av to svært enkle systemer, hvor den ene er en skalert og forsinket utgave av den andre.

1 p.

(Fortsettes på side 3.)

d) Anta at du har et system med pol nullpunktsplott gitt i figuren under.



Et kontinuerlig signal $x(t)$ samples med samplingsfrekvens $F_s = 1$ kHz og gir et diskret signal $x[n]$ som påtrykkes systemet.

- Hva slags filter er dette?
- Hvilken fysisk frekvenskomponent (i Hz) av inngangssignalet vil filteret virke sterkest på?

1.0 p.

Oppgave 3 Sampling

Vi definerer et signal

$$s(t) = 5\cos(20\pi t) + 10\cos(12\pi t).$$

Det er samplet på frekvensen $F_s = 15$ Hz.

a) Oppstår det aliasing? Begrunn svaret. 0.5 p.

b) Hvis signalet er samplet på F_s med en perfekt analog til digital konverter og er rekonstruert med en ideell båndbegrenset interpolator, gi et utrykk for det rekonstruerte signalet. 0.5 p.

c) Gi et utrykk for det samplede signalet $s[n]$. 0.5 p.

d) Vi studerer det samplede signalet $s[n]$ for $0 \le n \le 29$. Beregn signalets DFT $S[k]$ og skisser den. Husk benevning på aksene. 1 p.

e) Ved å bruke resultatet i d) beregn invers DFT til $S[k]$. Vis at resultatet er den samplede versjonen av signalet vi fikk i b). 1 p.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4 Filtre

Vi skal designe et filter for å filtrere ut alle frekvenser større enn 150 Hz fra et signal $s(t)$ og la alle frekvenser under 150 Hz forbli uendret.

a) Signalet er samplet på $F_s = 600$ Hz. Tegn det ideelle (ikke realiserbart) filteret som fullfører spesifikasjonen gitt over. Bruk den normaliserte frekvensen ω og husk benevning på aksene. 0.5 p.

b) Vi vil designe et realiserbart FIR filter fra det ideelle filteret ved å bruke faste vinduer. Vi tillater et ripplenivå på $\delta_p = 0.01$ i passbåndet og $\delta_s = 0.005$ i stoppbåndet. Hvilke(t) fast(e) vindu(er) listet i tabellen under kan vi bruke for dette filteret? 0.5 p.

Vindu navn	Sidelobe-nivå [dB]	Hoved-lobens bredde	Transisjons-båndets bredde ($\Delta\omega$)	Rippelnivå ($\delta_p \approx \delta_s$)	A_p [dB]	A_s [dB]
Rektangulært	-13	$4\pi/L$	$1.8\pi/L$	0.09	1.57	21
Bartlett	-25	$8\pi/L$	$6.1\pi/L$	0.05	0.87	26
Hann	-31	$8\pi/L$	$6.2\pi/L$	0.0063	0.11	44
Hamming	-41	$8\pi/L$	$6.6\pi/L$	0.0022	0.038	53
Blackman	-57	$12\pi/L$	$11\pi/L$	0.0002	0.0035	74

Tabell 1: Egenskaper for faste vinduer brukt med FIR filter design. L er lengden til filterets impulsrespons.

c) De spesifiserte pass- og stoppbåndsfrekvensene er $\omega_p = 0.5\pi$ og $\omega_s = 0.6\pi$. Hva er den minste filterordenen man kan oppnå? 0.5 p.

d) Stoppbåndfrekvensen ω_s er endret fra 0.6π til 0.55π, hva blir nå den minste filterordenen? Hva er konsekvensen for ripplenivået? 0.5 p.

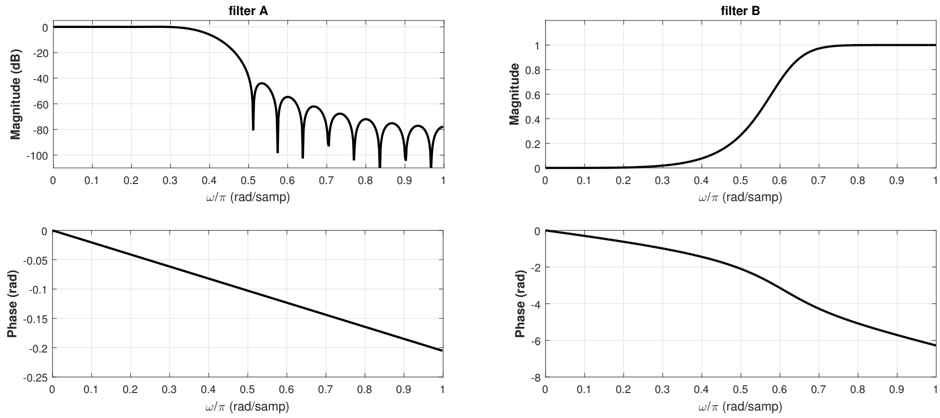
e) Anta et annet FIR filter design, ikke begrenset til de faste vinduene over. Vi ønsker å få en equiripple frekvensrespons både i passbåndet og i stoppbåndet. Hvilken type FIR filter bør vi velge? Blir ordenen til dette filteret mindre, lik, eller større enn ordenen til det forrige filteret? 0.5 p.

f) Vi ønsker fortsatt en frekvensrespons med equiripple både i passbåndet og i stopbåndet men vi bruker IIR filtre istedenfor FIR filtre. Hvilken type filter bør vi velge? Hvordan blir ordenen til filteret sammelignet med ordenen til filteret designet i e) (mindre, lik, eller større)? Hva slags trade-off må man godta når man bytter fra FIR til IIR filtre? 0.5 p.

(Fortsettes på side 5.)

g) Figuren under viser frekvensresponsen og faseresponsen til to filtre. Beskriv så detaljert som mulig hva slags filtre de representerer. Begrunn dine svar.

- lavpass, båndpass, høypass, eller båndstopp
- FIR (symmetrisk) eller IIR



1 p.

Oppgave 5 Digitalisering og digital prosessering

Vi studerer spenningsignalet:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$$

hvor

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 5\sin(1000\pi t + \pi/3) \\ s_2(t) &= 2\sin(900\pi t) \\ s_3(t) &= 3\cos(400\pi t). \end{aligned}$$

Vi vil digitalisere det og studere det i frekvensdomenet. Signalet $s(t)$ har enhet $[V]$.

a) Hvilket analogt element er det vanlig å sette foran en analog til digital konverter (ADC)? Hvorfor gjør vi dette? 0.5 p.

b) Gitt at den analoge spenningen til ADCen er satt til ± 10 V, hva er minste antall bits vi bør bruke i ADCen for å begrense kvantifiseringsfeilen $|e|$ til 0.1 V eller mindre? Du kan anta at selve kvantiseringen er gjort ved avrundingsoperasjonen. 1 p.

c) Bestem minste samplingsfrekvens F_s for å sample $s(t)$ riktig. 0.5 p.

d) Anta en samplingsfrekvensen $1kHz$. Vi sampler 10 ms av $s(t)$ og får et digitalt signal $s[n]$. Ved å ta DFT'n til $s[n]$ kan man identifisere alle frekvenskomponentene i $s(t)$ fra magnituden til frekvensspekteret? Begrunn svaret. 1 p.

(Fortsettes på side 6.)

e) Før vi beregner DFT av $s[n]$, multipliserer vi nå med et Hann vindu av samme lengde $w[n]$. Forklar konsenkvensene på frekvensspekteret til $s[n] \cdot w[n]$ sammenlignet med frekvensspekteret til $s[n]$. 0.5 p.

f) Vi ønsker å rekonstruere det analoge signalet fra det digitale signalet. Siden den båndbegrensede interpolatoren ikke er realiserbar bruker vi en "sample and hold" forsterker med impulsrespons

$$g_{SH}(t) = 1 \quad \text{hvis } 0 \leq t \leq T, \quad 0 \text{ ellers}$$

hvor $T = 1/F_s$. Hva er de uønskede konsekvensene ved å bruke dette filteret på frekvensspekteret til det rekonstruerte signalet? Hvordan kan vi kompensere for disse? 1.0 p.

(Fortsettes på side 7.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Lineær konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

Sirkulær konvolusjon:

$$y[n] = x[n] \circledN h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[< n-k >_N] = \sum_{k=0}^{N-1} x[< n-k >_N]h[k] = h[n] \circledN x[n]$$

Diskret tid-fouriertransformasjon (DTFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega
\end{aligned}
$$

Diskret fouriertransformasjon (DFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1
\end{aligned}
$$

(Fortsettes på side 8.)

z-transformasjonen:

$$\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$