UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3470/4470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	25. januar 2019
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 9 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merknad 1: Alle størrelser og figurakser skal benevnes.
Merknad 2: Les gjennom hele oppgavesettet før du begynner!

Oppgave 1 Z-transform (14 p.)

a) Et kausalt, lineært og tidsinvariant system er gitt av differensligningen $y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$.

- Finn systemfunksjonen H(z). Begrunn svaret ditt. 1 p.
- Finn systemets poler og nullpunkter. Indiker plasseringene i et pol-nullpunktsplott. Begrunn svarene. 2 p.
- Hva er konvergensområdet (ROC)? Indiker ROC i pol-nullpunktsplottet. Begrunn svaret ditt. 1 p.

b) Vis at z-transform av $x[n] = a^n u[n]$ er $X(z) = 1/(1 - az^{-1})$. Hva er konvergensområdet (ROC) til $X(z)$? Begrunn svaret ditt. 2 p.

c) Finn impulsresponsen $h[n]$ til et kausalt system med systemfunksjon

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

2 p.

d) Vi har signalet $x[n] = 12 \cdot 0.5^n(u[n+1] - u[n-3])$.

- Tegn $x[n]$ i en figur. Ha tydelige x- og y-akseverdier. 1 p.
- Tegn både $x[-n]$ og $x[n+2]$. Ha tydelige akseverdier. 1 p.
- Tegn $x[-n+2]$. Ha tydelige akseverdier. 1 p.

e) Vi har et system med impulsrespons $h[n] = \{\underline{2}, -4, 2\}$. Hva er utgangssignalet $y[n]$ om vi sender signalet $x[n] = \{\underline{3}, 0, 4, 1\}$ inn i dette systemet?

(Fortsettes på side 2.)

- Finn $y[n]$ ved å forbli i tidsdomenet. Vis full utregning. 1 p.
- Finn $y[n]$ ved å konvertere til z-domenet. Vis full utregning. 2 p.

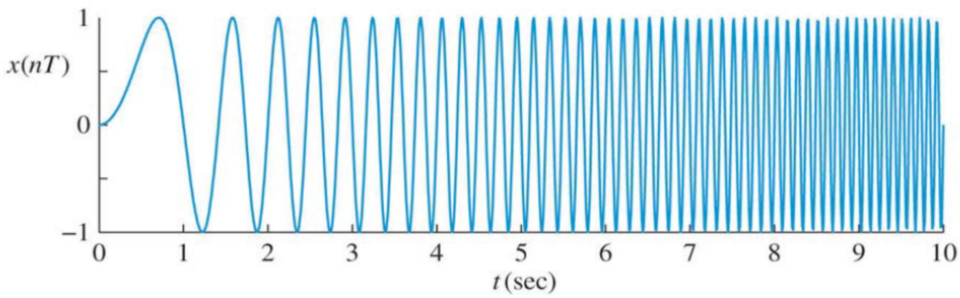
Oppgave 2 Diverse oppgaver (9 p.)

a) Petter kjeder seg mens han venter ved bussholdeplassen. Han bestemmer seg for å telle antall leiebiler fra Hertz som passerer forbi. Han ser seks Hertz-biler mens han venter de tjue minuttene det tar før bussen kommer. Hvilken frekvens tilsvarer dette i Hz? 1 p.

b) Petter leker med en akustisk transducer som sender ut en kort lydbølge x_1 med samplingsfrekvens F_s. Lydbølgen x_1 sendes mot et objekt, den treffer objektet og reflekteres tilbake til transduceren igjen. Petter registrerer det mottatte signalet x_2. Det ser ut som en forsinket og støyete versjon av x_1. Basert på utgangssignalet $x_1[n]$, det mottatte signalet $x_2[n]$ og bølgehastigheten v, forklar hvordan Petter kan bruke ligningen under til å finne avstanden til objektet. 2 p.

$$r_{x_1x_2}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n-l] = x_1[l] \star x_2[-l], \quad -\infty < l < \infty$$

c) Petter fortsetter å leke med den akustiske transduceren og sender nå ut lydsignalet $x[n]$ vist i Figur 1. Det har ti sekunders varighet og øker lineært i frekvens opptil 10 Hz. Petter sender dette signalet gjennom et filter med magnituderespons vist i Figur 2. Skisser det resulterende signalet $y(nT)$ etter at signalet $x(nT)$ har passert gjennom filteret. Ha de samme x- og y-aksene som i Figur 1. 1 p.

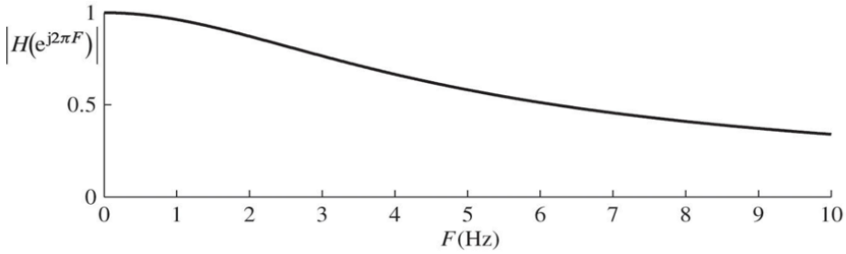


Figur 1: Lydsignalet $x(nT)$ i c). Her er T tidsintervallet mellom hver sample.

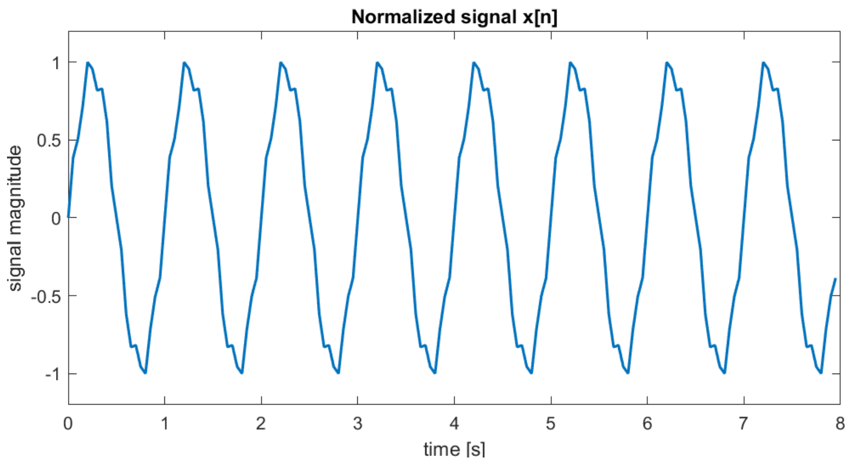
d) Er $y[n] = nx[n]$ tidsinvariant? Begrunn svaret ditt. 1 p.

e) Vi har et kontinuerlig signal $x(t) = 10\sin(2\pi F_1 t) + \sin(2\pi F_2 t)$, der $F_1 = 1$ Hz og $F_2 = 6$ Hz. Det samples i åtte sekunder med en samplingsfrekvens på 20 Hz. Det resulterende signalet $x[n]$ normaliseres og vises i Figur 3. Signalet sendes så gjennom et filter, og $y[n]$ er det resulterende signalet. Figur 4 viser det filtrerte signalet etter at $x[n]$ har blitt sendt gjennom

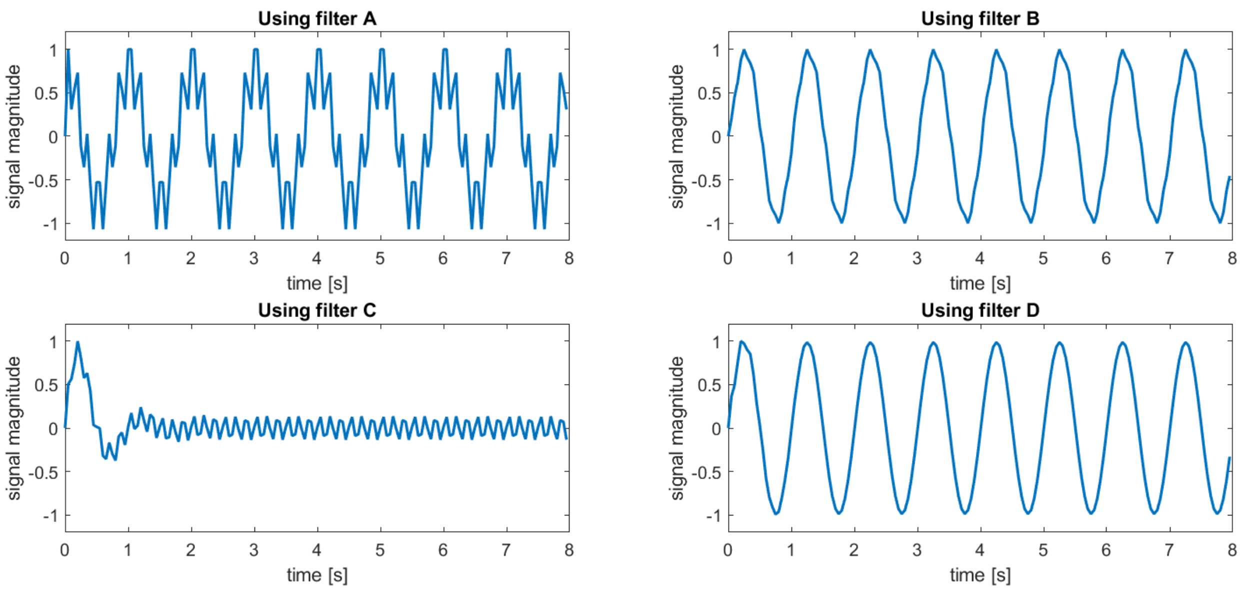
(Fortsettes på side 3.)



Figur 2: Magnituderespons til filteret i c)



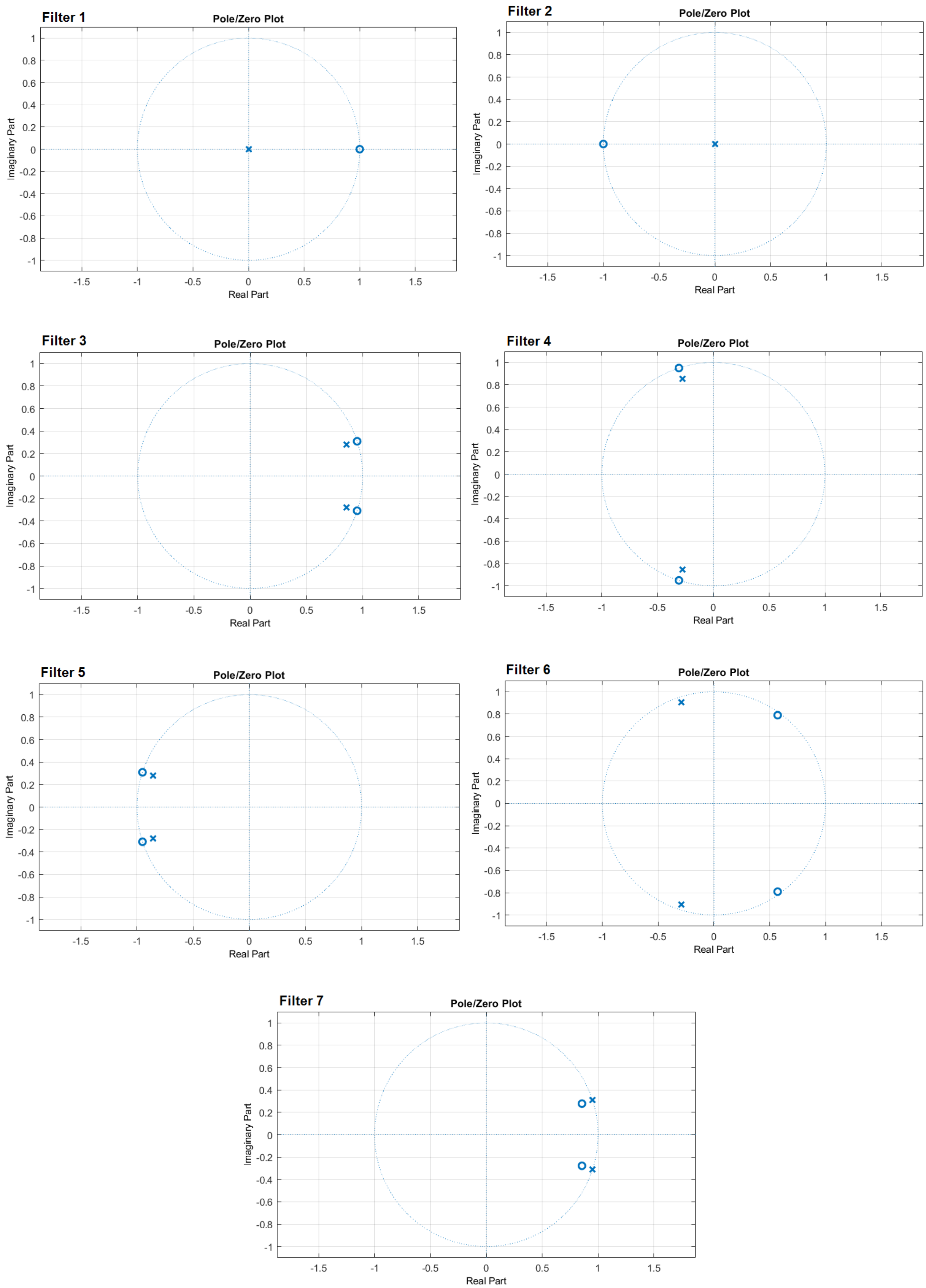
Figur 3: Signalet $x[n]$ i e)



Figur 4: Filtrert og normalisert signal etter å ha brukt filter A, B, C eller D

henholdsvis filter A, B, C eller D, og så normalisert. Figur 5 viser syv mulige filtre. Bestem hvilke av disse filtrene som er filtrene A, B, C og D og **begrunn svarene**. 4 p.

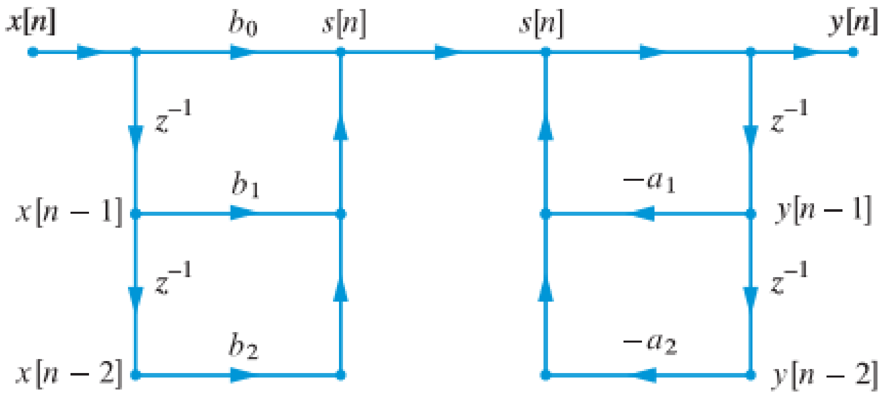
(Fortsettes på side 4.)



Figur 5: Syv ulike filtre nummerert 1-7. Fire av dem ble brukt til å lage de filtrerte signalene presentert i Figur 4.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 3 Strukturer for diskret-tid systemer (8 p.)



Figur 6: Direkte form I struktur for andreordens IIR system.

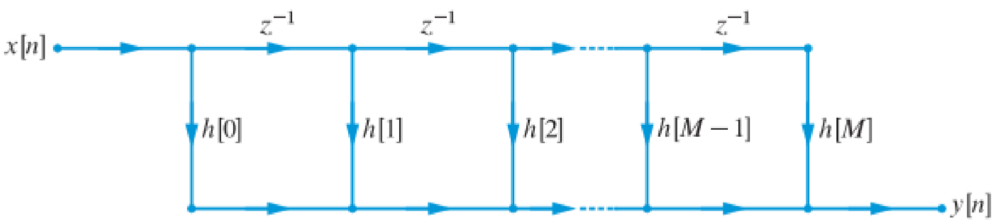
a) Gitt et andreordens system

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + 0.75z^{-2}}{1 - 2.5z^{-1} + 5z^{-2}}$$

og den tilhørende Direkte form I strukturen i Figur 6, finn verdiene til b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 2 p.

b) Skisser den transponerte direkte form I strukturen til systemet. 2 p.

c) Direkte form I strukturer er såkalte "nullpunkter først realiseringer". Direkte form II strukturer har polene først. Finn og skisser en direkte form II realisering av systemet. Kommenter eventuelle fordeler ved denne realiseringen sammenlignet med direkte form I. 2 p.



Figur 7: Direkte form struktur for FIR system.

d) Et generelt FIR filter kan realiseres ved hjelp av en FIR direkte form struktur, som i Figur 7. En hardwareimplementasjon av et andreordens system implementert på denne måten har 3 multiplikasjonsblokker og 2 addisjonsblokker. Anta nå at andreordens FIR filteret har lineær fase. Finn og skisser en FIR lineær fase filterrealisering som bare har 2 multiplikasjonsblokker og 2 addisjonsblokker. 2 p.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 4 Filterdesign (12 p.)

Du har fått i oppgave å designe et lavpassfilter for å fjerne støy med frekvens høyere en 4 MHz fra et digitalt signal samplet med samplingsfrekvens $F_s = 10$ MHz. Det originale signalet, uten støy, er et båndbegrenset signal i området $1 - 2$ MHz. Det er viktig at du ikke forvrenger det originale signalet, og det er i tillegg ønskelig med et kort filter. Transisjonsbåndet må ikke være bredere enn 1 MHz. Passbåndrippelet må være maksimalt $\delta_p = 0.02$ og stoppbåndsrippelet maksimalt $\delta_s = 0.01$.

a)
- Beregn stoppbåndfrekvensen i normalisert frekvens, ω_s. 1 p.
- Beregn passbåndsfrekvensen i normalisert frekvens, ω_p. 1 p.

b) Skisser lavpassfilteret. Bruk normalisert frekvens og marker δ_p, δ_s, ω_s og ω_p i skissen. Husk aksebenevninger! 2 p.

c) Du skal nå designe et FIR filter ved hjelp av faste vinduer. Bruk tabell 1 til å finne ut hvilke vinduer du kan bruke i designet ditt. Begrunn svaret. 1 p.

Vindu navn	Sidelobe-nivå [dB]	Hoved-lobens bredde	Transisjons-båndets bredde ($\Delta\omega$)	Rippelnivå ($\delta_p \approx \delta_s$)	A_p [dB]	A_s [dB]
Rektangulært	-13	$4\pi/L$	$1.8\pi/L$	0.09	1.57	21
Bartlett	-25	$8\pi/L$	$6.1\pi/L$	0.05	0.87	26
Hann	-31	$8\pi/L$	$6.2\pi/L$	0.0063	0.11	44
Hamming	-41	$8\pi/L$	$6.6\pi/L$	0.0022	0.038	53
Blackman	-57	$12\pi/L$	$11\pi/L$	0.0002	0.0035	74

Tabell 1: Egenskaper for faste vinduer brukt med FIR filter design. L er lengden til filterets impulsrespons.

d) Hva er den minste filterordenen, M, du kan ha for de oppgitte spesifikasjonene? 1 p.

e) Hvis kravet til filteret skjerpes til å ha et smalere transisjonsbånd på bare 500 kHz, hvilken effekt vil dette ha på filterets lengde? 1 p.

f) Vil et filter designet med denne metoden alltid ha lineær fase? Begrunn svaret. 1 p.

g) Du vurderer nå å heller bruke et IIR filter. Hva er de viktigste fordelene og ulempene ved å bruke et IIR filter? 2 p.

(Fortsettes på side 7.)

h) Butterworth IIR lavpassfilteret er basert på uttrykket

$$|H_B(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}, N = 1, 2, \ldots$$

Bruk dette til å finne et uttrykk for Ω_{-3dB} (frekvensen hvor $H_B(j\Omega)$ har falt 3dB). Du kan anta at $10^{3/10} \approx 2$. 2 p.

Oppgave 5 DFT og konvolusjon (6 p.)

Gitt følgende diskrete signaler med tilhørende DFT:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \{\underline{0}, 0, 1, 0, 1, 0\}, \qquad & x_1[n] \overset{DFT}{\underset{N}{\leftrightarrow}} X_1[k] \\ x_2[n] &= \{\underline{0}, 0, 0, 0, 0, 1\}, \qquad & x_2[n] \overset{DFT}{\underset{N}{\leftrightarrow}} X_2[k] \end{aligned}$$

a) Finn $y[n]$ slik at $y[n] \overset{DFT}{\underset{N}{\leftrightarrow}} Y[k]$ og $Y[k] = X_1[k]X_2[k]$. Du kan godt velge $N = 6$. 2 p.

b) Gitt følgende signaler: $x_3[n] = \{\underline{1}, -3, 0, 2\}$ og $x_4[n] = \{\underline{0}, 1, 2, -1, 0, 1\}$.

- Beregn den lineære konvolusjonen $x_3[n] * x_4[n]$. 1 p.
- Beregn 6 punkts sirkulær konvolusjonen $x_3[n]⑥x_4[n]$. 1 p.

c) Kommenter forskjellen på resultatet i b) og c). Hva må lengden på den sirkulære konvolusjonen være for at den lineære og sirkulære konvolusjonen skal bli lik. 1 p.

d) Forklar hva nullutvidelse (zero padding) av et signal før DFT kan brukes til (noen mulige stikkord: filtrering, konvolusjon, frekvenssampling, visualisering, ny informasjon). 1 p.

(Fortsettes på side 8.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Lineær konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

Sirkulær konvolusjon:

$$y[n] = x[n] \circledN h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[< n-k >_N] = \sum_{k=0}^{N-1} x[< n-k >_N]h[k] = h[n] \circledN x[n]$$

Kontinuerlig-tid-fouriertransformasjon (CTFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \quad X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \\
\text{Syntese:} \quad x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega
\end{aligned}
$$

Kontinuerlig-tid-fourierrekke (CTFS):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \quad c_k &= \frac{1}{T_o}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt \\
\text{Syntese:} \quad x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}
\end{aligned}
$$

(Fortsettes på side 9.)

Diskret tid-fourierrekke (DTFS):

$$\begin{aligned} \text{Analyse:} \qquad c_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \text{Syntese:} \qquad x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned}$$

Diskret tid-fouriertransformasjon (DTFT):

$$\begin{aligned} \text{Analyse:} \qquad X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ \text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \end{aligned}$$

Diskret fouriertransformasjon (DFT):

$$\begin{aligned} \text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ \text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

z-transformasjonen:

$$\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$