

# UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i                    INF3470/4470 — Digital signalbehandling

Eksamensdag:            10. desember 2018

Tid for eksamen:        14:30–18.30

Oppgavesettet er på 8 sider.

Vedlegg:                 Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

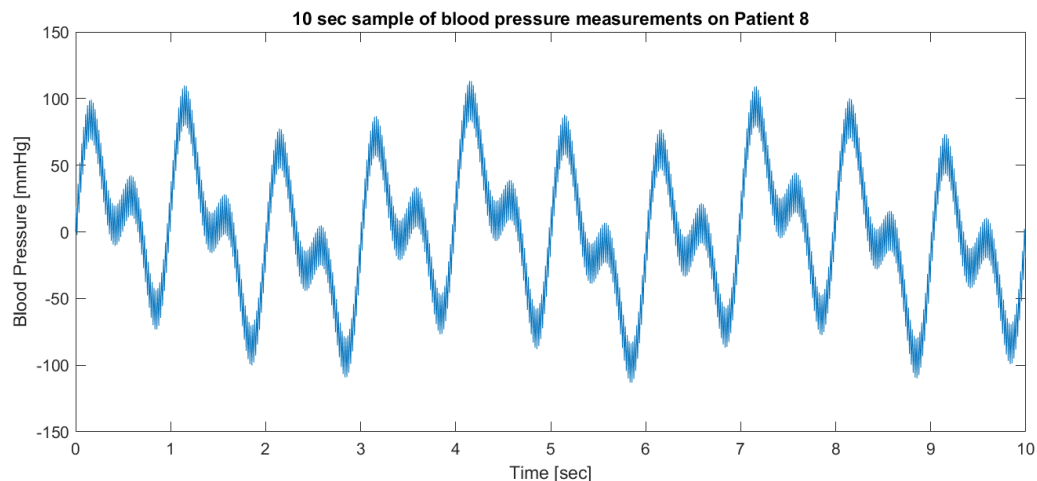
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

**Merknad 1: Alle størrelser og figurakser skal benevnes.**

**Merknad 2: Les gjennom hele oppgavesettet før du begynner!**

## Oppgave 1    Blodtrykksmålinger (13 p.)

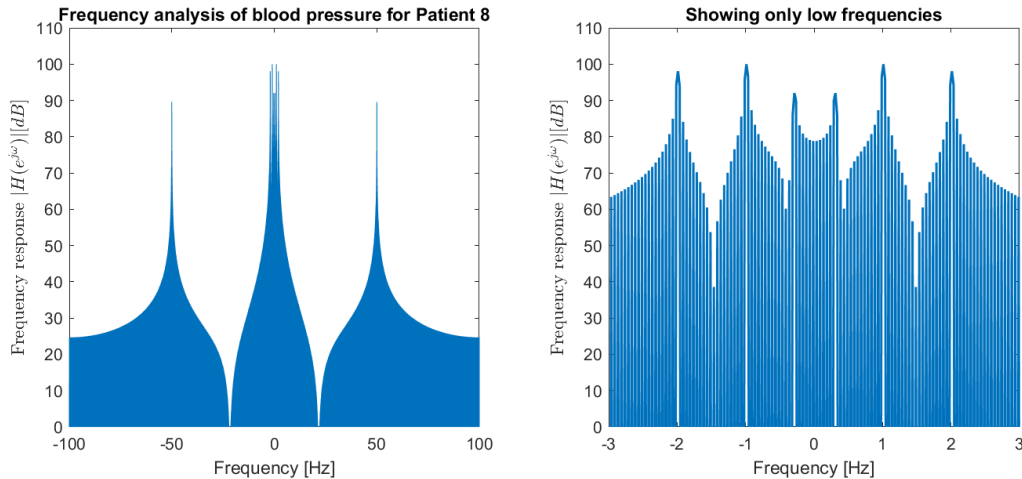
Marit er mastergradstudent og har fått et datasett av veilederen sin. Hun skal analysere blodtrykksmålinger utført på pasienter. Figur 1 viser signalet



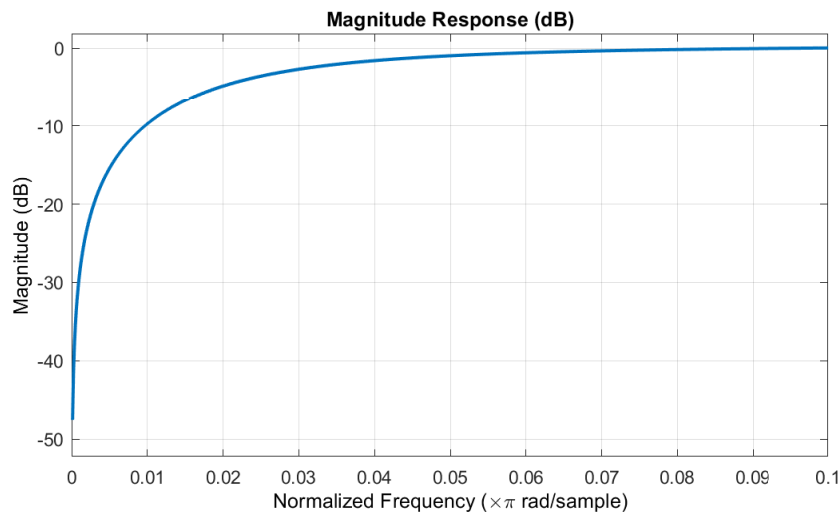
Figur 1: Utdrag fra blodtrykksmålinger til en av pasientene

fra en av pasientene. Samplingsfrekvensen er 200 Hz. Målingene er støyete og veilederen forklarer at de sikkert inneholder bidrag fra både pasienten sin pust og støy fra selve opptaksutstyret. Pustefrekvens heter respirasjonsfrekvens på det medisinske fagspråket, og betyr antall innåndinger per minutt. Marit tar Fourieranalyse av signalet. Figur 2 viser resultatet, hvor vi kan se fire dominante frekvenser.

*(Fortsettes på side 2.)*



Figur 2: Frekvensanalyse av blodtrykksmålingene i Figur 1. De fire dominante frekvensene er 0.3, 1, 2 og 50 Hz.



Figur 3: Magnituderespons til Marits filter i b). Figuren er plottet i MATLAB. Merk at MATLAB normaliserer frekvens med Nyquistfrekvensen istedenfor samplingsfrekvensen.

- a) For en voksen person er pustefrekvensen normalt rundt 12-16 innåndinger per minutt. Pustefrekvensen til denne pasienten er 0.3 Hz. Hvor mange innåndinger per minutt tilsvarer det? Vis utregning. 1 p.
- b) For å kunne fjerne pustens bidrag ser Marit først på et enkelt, lineært filter som har differanseligningen  $y[n] + ay[n - 1] = x[n] + bx[n - 1]$ .
- Finn systemets transferfunksjon  $H(z)$ . 1 p.
  - For hvilke verdier av  $a$  og  $b$  er filteret stabilt? Når er filteret kausalt? Når har filteret minimum fase? Begrunn svarene. 3 p.
  - Marit velger  $a$  og  $b$  verdier til filteret sitt. Hun plottet magnituderesponsen til filteret i MATLAB for positive normaliserte fre-

(Fortsettes på side 3.)

kvenser fra 0 til 0.1 og får Figur 3. Merk at MATLAB normaliserer med Nyquistfrekvensen,  $F_s/2$ , istedenfor samplingsfrekvensen. Normalisert Nyquistfrekvens tilsvare i dette tilfellet altså 1. Hvordan vil dette filteret påvirke de dominante frekvensene vi ser i Figur 2 og det resulterende filtrerte signalet? Begrunn svaret.

2 p.

c) For at signalet skal gi mening for leger å analysere bør bidraget fra det ufysiologiske støyet på 50 Hz fjernes. Du får i oppgave å hjelpe Marit med å designe et notch filter som fjerner dette 50 Hz-støyet. Filteret skal ha to poler og to nullpunkter. Filteret skal være reelt.

- Oppgi plassering for poler og nullpunkter. Inkluder pol-nullpunktsploTT. Begrunn valg av vinkel og radius for poler og nullpunkter. Ha tydelige aksebeveininger.

2 p.

- Oppgi systemets transferfunksjon  $H(z)$ .

1 p.

- Skisser magnituderresponsen til filteret ditt. Ha tydelige aksebeveininger.

1 p.

- Istedenfor å lage dette notch filteret, hva er det enkleste FIR-filteret du kunne ha laget for å filtrere 50 Hz-støyet? Filteret skal ha reelle koeffisienter. Finn  $H(z)$  og tegn pol-nullpunktsploTTet. Begrunn svaret.

2 p.

## Oppgave 2 Z-transform (6 p.)

a) Hva er z-transformen til følgende sekvens? Hva er konvergensområdet?

$$x[n] = \left(\frac{4}{3}\right)^n u[1 - n]$$

2 p.

b) Et stabilt system har følgende poler og nullpunkter:

$$z_1 = j, \quad z_2 = -j, \quad p_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}, \quad p_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

Det er kjent at frekvensresponsen  $H(e^{j\omega})$  til systemet ved  $\omega = 0$  er lik 0.6, mao  $H(e^{j0}) = 0.6$ .

- Hva er konvergensområdet? Begrunn svaret.

2 p.

- Finn systemfunksjonen  $H(z)$ . Vis utregning.

2 p.

## Oppgave 3 Sampling (9 p.)

a) Du har et måleinstrument med samplingsrate på 2000 Hz.

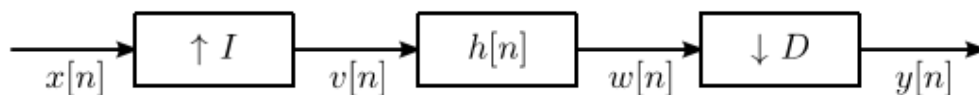
- Hva er foldefrekvensen og hva slags betydning har den?

1 p.

(Fortsettes på side 4.)

- Du ønsker å analysere et kontinuerlig 500 Hz-cosinussignal,  $x_c(t)$ . Hva er perioden  $T$  til dette signalet? I følge Shannon-kriteriet, hva bør samplingsfrekvensen minst være for dette signalet? 1 p.
  - Du sampler dette signalet med måleinstrumentet ditt. Hva blir uttrykket for ditt samplede signal  $x[n]$ ? Du kan anta ingen kvantiseringsfeil og at fasen  $\phi = 0$  ved tid  $t = 0$ . Er  $x[n]$  periodisk? Begrunn svaret. 2 p.
- b)
- Tegn frekvensresponsen  $X_c(e^{j2\pi F})$  av det kontinuerlige signalet  $x_c(t)$  gitt i a). Ha tydelige aksebenevninger for både x- og y-aksen. La x-aksen for begge plott være frekvensområdet  $[-6000, 6000]$  Hz. 1 p.
  - I et nytt plott, tegn frekvensresponsen til ditt samplede signal  $x[n]$ . Ha tydelige aksebenevninger for både x- og y-aksen. La x-aksen for begge plott være frekvensområdet  $[-6000, 6000]$  Hz. 1 p.
  - Kommenter forskjeller i plottene og forklar hvorfor de oppstår. 1 p.
- c)
- Hvilken frekvens vil du registrere på måleinstrumentet ditt om du analyserer et signal som har frekvens på 1500 Hz? Hva om signalet har frekvens på 4300 Hz? Begrunn svarene. 2 p.

## Oppgave 4 Samplingsratekonvertering (13 p.)

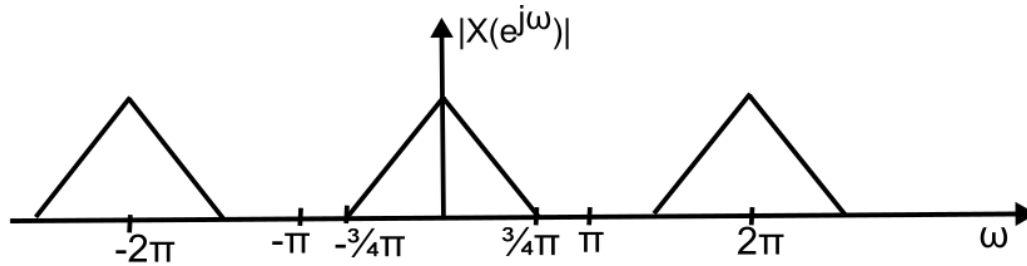


Figur 4: System for samplingsratekonvertering.

Figur 4 viser et standard system for ratekonvertering (opp- og nedsampling) av diskrete signaler. Anta at signalet  $x[n]$  er samplet fra et kontinuerlig signal  $x_c(t)$  med samplingsfrekvens  $F_s = 10$  kHz. I figuren betyr  $I$  interpolasjonsfaktoren og  $D$  desimeringsfaktoren. Filteret  $h[n]$  er et ideelt lavpassfilter med knekkfrekvens  $\omega_c$ .

- a) Hva er funksjonen/formålet til dette lavpassfilteret? Hint: Det har *to* funksjoner. 2 p.
- b) Uttrykk knekkfrekvensen,  $\omega_c$ , til lavpassfilteret ved hjelp av  $I$  og  $D$ . Her er  $\omega_c$  digital vinkelfrekvens. 1 p.
- c) Anta at knekkfrekvensen er  $\omega_c = \pi/3$  og at magnituderesponsen til inngangssignalet  $|X(e^{j\omega})|$  er som i figur 5. Skisser magnituderesponsen  $|V(e^{j\omega})|$ ,  $|W(e^{j\omega})|$  og  $|Y(e^{j\omega})|$  for
- $I = 3$ ,  $D = 2$  4 p.

(Fortsettes på side 5.)



Figur 5: Magnituderresponsen til inngangssignalet.

- $I = 2, D = 3$

4 p.

Bruk samme frekvensakse og indiker senterfrekvenser og bredder for alle spektra, som i figur 5. NB: Du får lov å anta at enhver endring av maksimal magnitudo i løpet av prosessen er kompensert av forsterkningen i lavpassfilteret. Du kan derfor skissere slik at alle responsene har samme konstante maksimal magnitudo.

- d) Anta at lavpassfilteret er korrekt satt opp i henhold til b). Finn det høyeste forholdet  $D/I$  som fortsatt muliggjør perfekt rekonstruksjon av  $x[n]$  fra  $y[n]$ . Begrunn svaret.

2 p.

## Oppgave 5 FIR filter design (10 p.)

- a) Gitt frekvensresponsen til et ideelt lavpassfilter,  $H_{LP}(e^{j\omega})$ , med kutfrekvens  $\omega_c$ , vis at impulsresponsen blir

$$h_{LP}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, -\infty < n < \infty$$

1 p.

- b) Forklar hvorfor dette filteret ikke lar seg implementere i praksis.

1 p.

- c) En måte å tilnærme det ideelle filteret med et FIR filter, er ved å bruke en reell vindusfunksjon for å velge ut en del av den ideelle impulsresponsen. Benevn vindusfunksjonen som  $w[n]$  og anta at det har lengde  $2M + 1$  og er sentrert om  $n = 0$ . Forklar kvalitativt (med ord) hvordan DTFT av vindusfunksjonen påvirker egenskapene til lavpassfilteret.

2 p.

- d) Du har funnet ut for din anvendelse må transisjonsbåndet være mindre enn 1 kHz. Samplingsfrekvensen er 10 kHz. Du har slått opp i tabell og funnet at det rektangulære vinduet har oppgitt  $\Delta\omega = 4\pi/L$  hvor  $\Delta\omega$  er transisjonsbåndet og  $L$  er vinduets lengde.

- Hvilken filterorden må du velge?

1 p.

- Vil filteret ditt ha lineær fase? Begrunn svaret.

1 p.

(Fortsettes på side 6.)

- Ut fra det som er gitt i oppgaven til nå, kan du avgjøre hvorvidt filteret ditt vil bli FIR type I, II, III eller IV? Begrunn svaret. 1 p.
- e) Det viser seg at med filteret du kommer fram til, har for mye passbåndrippel. Du prøver å løse dette ved å øke filterorden betraktelig. Men det hjelper ingenting. Forklar hvorfor det ikke hjelper og foreslå en annen løsning på dette problemet. 1 p.
- f) Du må gi opp å designe filteret ved hjelp av vinduer, da filtere som oppfyller krav til transisjonsbånd blir altfor lange. Hva slags alternative designstrategier vil du foreslå i stedet? Forklar kort (maks. 100 ord) fordeler/ulemper med de ulike fremgangsmåtene og hvilke vurderinger du må gjøre. 2 p.

(Fortsettes på side 7.)

## Formelsamling

### Grunnleggende sammenhenger:

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\
 \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
 \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\
 \cos \alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
 \sin \alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
 \sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
 ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

### Lineær konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

### Sirkulær konvolusjon:

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[\langle n-k \rangle_N] = \sum_{k=0}^{N-1} x[\langle n-k \rangle_N]h[k] = h[n] \circledast x[n]$$

### Kontinuerlig-tid-fouriertransformasjon (CTFT):

$$\begin{aligned}
 \text{Analyse: } X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \\
 \text{Syntese: } x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega
 \end{aligned}$$

### Kontinuerlig-tid-fourierrekke (CTFS):

$$\begin{aligned}
 \text{Analyse: } c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt \\
 \text{Syntese: } x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}
 \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 8.)

**Diskret tid-fourierrekke (DTFS):**

$$\begin{aligned} \text{Analyse: } c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \text{Syntese: } x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned}$$

**Diskret tid-fouriertransformasjon (DTFT):**

$$\begin{aligned} \text{Analyse: } X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ \text{Syntese: } x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$

**Diskret fouriertransformasjon (DFT):**

$$\begin{aligned} \text{Analyse: } X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ \text{Syntese: } x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

**z-transformasjonen:**

$$\text{Analyse: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$