Løsningsforslag eksamen INF3480 vår 2011

Oppgave 1

a) A - Arbeidsrommet er en kule med radius $L_3 + L_4$.
B - Alle rotasjonsaksene er paralelle, roboten beveger seg bare i et plan, dvs. null volum.
C - Arbeidsrommet er en kule med radius L_4.
D - Arbeidsrommet er en kule med radius $\sqrt{L_3^2 + L_4^2}$.

b) Proprioceptive – sier noe om robotens egen tilstand: Termometer, akselerometer, gyroskop.
Exteroceptive – sier noe om verden rundt roboten: Kamera, kontaktsensor, kompass, GPS, sonar.

c) Tre svareksempler:

- Gåmønstre for benbasert robot, representert som kromosomer/bit-strenger i en evolusjonær algoritme Utvikling skjer ved å teste ut mulige løsninger, forkaste de dårlige, og lage nye kombinasjoner av de beste løsningene. I robotkyllingen Henriette var ulike løsningskandidater til gåmønsteret kodet som bit-strenger, hvor hver bitstreng bestod av 3 benkonfigurasjoner med mellomliggende pause. De første 4 bitene beskrev aktuatorene som kontrollerer benene, de neste 6 bitene beskrev lengden på pause før neste benkonfigurasjon ble aktivert. (se fig 1)
- (2p) Maskinlæring kan brukes til å rette feil på roboter som opererer i omgivelser hvor det ikke er mulig for en tekniker å gjøre reparasjoner. (1p) Sensorer brukes til å vurdere om roboten utfører oppgaver på riktig måte. (2p) Eksempel: Mars Rover - Adaptiv hardware. Dersom roboten blir skadet, for eksempel i landingen, og ikke beveger seg på vanlig måte kan roboten ved hjelp av rekonfigurerbar hardware justere seg selv slik at den fortsatt beveger seg i riktig retning i forhold til kommandoer fra forskerne på jorden.
- Reinforcement learning - kan brukes til å lære en robot strategier for å bevege seg rundt i et område. Roboten har et kart. Den vet hvor på kartet den er, og har som mål å nå et bestemt sted på kartet. Den setter opp en tabell over ulike mulige steder å gå fra de ulike posisjonene på kartet. En poengsum gis for å nå målet, og en mindre poengsum gis for å nå en posisjon med en kjent vei til målet. Ved å plassere roboten på tilfeldige steder på kartet, og repetere prosessen tilstrekkelig antall ganger vil til slutt roboten ha lært seg

d) To ekvivalente svar:
1. Egenverdiene til det andre ordens systemet er like.
2. Dempingsforholdet ζ er null.
Figur 2 viser en typisk respons for et kritisk dempet system i rødt.

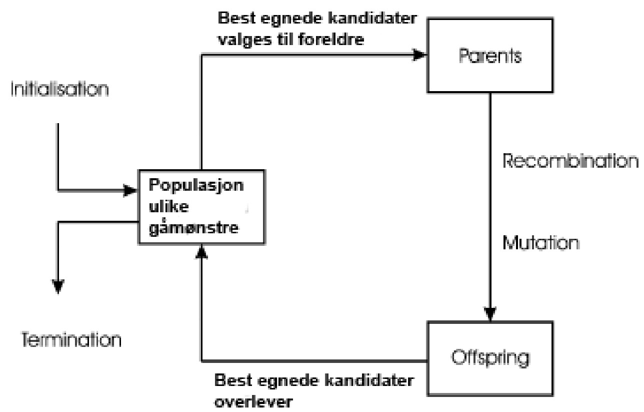

Figure 1: Svareksempel til oppgave 1c

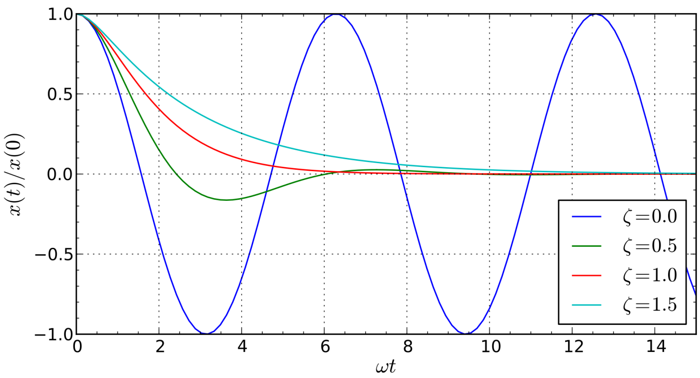

Figure 2: Respons fra 2. ordens system

Oppgave 2

a) DH-parametre

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	L_{off}	$-90°$	L_1	θ_1^*
2	0	$-90°$	L_2^*	$-90°$
3	L_3	0	0	$\theta_3 - 90°$

b) Transformasjonsmatrisser fra DH-parametrene

$$\boldsymbol{T}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & c_1 L_{off} \\ s_1 & 0 & c_1 & s_1 L_{off} \\ 0 & -1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{T}_3^2 = \begin{bmatrix} s_3 & c_3 & 0 & s_3 L_3 \\ -c_3 & s_3 & 0 & -c_3 L_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Regner ut $\boldsymbol{T}_T^0$

$$\boldsymbol{T}_2^0 = \boldsymbol{T}_1^0 \boldsymbol{T}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & c_1 & -s_1 L_2 + c_1 L_{off} \\ 0 & -c_1 & s_1 & c_1 L_2 + s_1 L_{off} \\ 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{T}_3^0 = \boldsymbol{T}_2^0 \boldsymbol{T}_3^2 = \begin{bmatrix} -s_1 c_3 & s_1 s_3 & c_1 & -s_1 L_2 + c_1 L_{off} - s_1 c_3 L_3 \\ c_1 c_3 & -c_1 s_3 & s_1 & c_1 L_2 + s_1 L_{off} + c_1 c_3 L_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_1 + s_3 L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

c) Setter opp likningene

$$-s_1 L_2 + c_1 L_{off} - s_1 c_3 L_3 = p_x \tag{5}$$
$$c_1 L_2 + s_1 L_{off} + c_1 c_3 L_3 = p_y \tag{6}$$
$$L_1 - s_3 L_3 = p_z \tag{7}$$

Isolerer s_3 i (7) som gir

$$s_3 = A_3 = \frac{L_1 - p_y}{L_3} \tag{8}$$

Dette git θ_3 som

$$\theta_3 = \pm \mathsf{atan}\left(\sqrt{1-A_3^2}, A_3\right) \tag{9}$$

For å finne de to resterende variablene kan man bruke to framgangsmåte, algebraisk og geometrisk. Først algebraisk. Opphøyer (5) og (6) i andre

$$s_1^2 L_2^2 + c_1^2 L_{off}^2 + s_1^2 c_3^2 L_3^2 - 2 s_1 c_1 L_2 L_{off} + 2 s_1^2 c_3 L_2 L_3 = p_x^2 \tag{10}$$
$$c_1^2 L_2^2 + s_1^2 L_{off}^2 + c_1^2 c_3^2 L_3^2 + 2 s_1 c_1 L_2 L_{off} + 2 c_1^2 c_3 L_2 L_3 = p_y^2 \tag{11}$$

Adderer men disse to likningene sammen får man

$$L_2^2 + L_{off}^2 + c_3^2 L_3^2 + 2 c_3 L_2 L_3 = p_x^2 + p_y^2 \tag{12}$$

Ved å bruke første kvadratsettning kan man skive dette som

$$(L_2 + c_3 L_3)^2 + L_{off}^2 = p_x^2 + p_y^2 \tag{13}$$

Dette gir løsningen på L_2

$$L_2 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - L_{off}^2} - c_3 L_3 \tag{14}$$

Bruker bare den positive løsningen til kvadratroten, da L_2 må være positiv. Så multipliserer vi (5) med $-s_1$ og (6) med c_1 og får

$$s_1^2 L_2 - s_1 c_1 L_{off} + s_1^2 c_3 L_3 = -s_1 p_x \tag{15}$$
$$c_1^2 L_2 + s_1 c_1 L_{off} + c_1^2 c_3 L_3 = c_1 p_y \tag{16}$$

Adderer vi disse to likningene får vi

$$L_2 + c_3 L_3 = -s_1 p_x + c_1 p_y \tag{17}$$

Dette gir θ_1

$$A_1 = p_y \tag{18}$$
$$B_1 = -p_x \tag{19}$$
$$C_1 = L_2 + c_3 L_3 \tag{20}$$
$$\theta_1 = \mathsf{atan}(B_1, A_1) \pm \mathsf{atan}\left(\sqrt{A_1^2 + B_1^2 - C_1^2}, C_1\right) \tag{21}$$

Ved geometrisk tilnærming projekserer man roboten i x_0, y_0 planet. Se figur 3. Posisjonen til griperen er gitt lengden av vektoren $[p_x, p_y]$. Den kan også finnes som hypotenusen til trekanten. Katetene er L_{off} og $L_2 + c_3 L_3$. Dette gir likningen

$$p_x^2 + p_y^2 = L_{off}^2 + (L_2 + c_3 L_3)^2 \tag{22}$$

Dette er den samme likningen som for den algebraiske metoden. For å finne den siste variabelen projekserer vi posisjonsvektoren til det nye koordinatsystemet med aksene x_0' og y_0', dvs. en rotasjon på θ_1. Dette gir

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 \\ -s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 p_x + s_1 p_y \\ -s_1 p_x + c_1 p_y \end{bmatrix} \tag{23}$$

Dette skal da være lik lengdene på robotarmene, slik at vi får to likninger

$$c_1 p_x + s_1 p_y = L_{off} \tag{24}$$
$$-s_1 p_x + c_1 p_y = L_2 + c_3 L_3 \tag{25}$$

hvor den ene likningen er lik den vi fikk ved å bruke algebraisk metode.

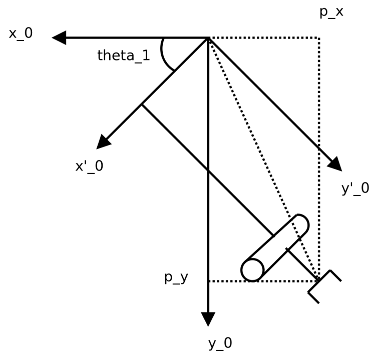

Figure 3: Geometrisk tilnærming til invers kinematikk

d) $q = \mathsf{invkin}(\boldsymbol{T}_T^B \boldsymbol{p}^T)$

e) Jacobian fra formlene på s. 133 i boka

$$\boldsymbol{J}_{v_1} = \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{o}_2 - \boldsymbol{o}_0) = \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{o}_2 \tag{26}$$
$$\boldsymbol{J}_{v_2} = \boldsymbol{z}_1 \tag{27}$$
$$\boldsymbol{J}_{\omega_1} = \boldsymbol{z}_0 \tag{28}$$
$$\boldsymbol{J}_{\omega_2} = \boldsymbol{0} \tag{29}$$

Det eneste som må regnes ut er

$$\boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{o}_2 = [-c_1 L_2 - s_1 L_{off}, -s_1 L_2 + c_1 L_{off}, 0]^T \tag{30}$$

Dette gir følgene Jacobian

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -c_1 L_2 - s_1 L_{off} & -s_1 \\ -s_1 L_2 + c_1 L_{off} & c_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

f) NB: mulig feil i løsningsforslaget på oppgave 2f Setter opp farten

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}_v(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} -(c_1 L_2 + s_1 L_{off})\dot{\theta}_1 - s_1 \dot{L}_2 \\ -(s_1 L_2 - c_1 L_{off})\dot{\theta}_1 + c_1 \dot{L}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Setter opp kinetisk energi

$$\mathcal{K} = \tfrac{1}{2} m (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{2} m \left((L_2^2 + L_{off}^2)\dot{\theta}_1^2 + \dot{L}_2^2 + 2L_{off}\dot{\theta}_1 \dot{L}_2 \right) \tag{33}$$

Setter opp potensiell energi, høyden er y-aksen til base-koordinatsystemet

$$\mathcal{P} = mgh = -mg\left(c_1 L_2 + s_1 L_{off}\right) \tag{34}$$

Setter opp Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P} = \tfrac{1}{2} m \left((L_2^2 + L_{off}^2)\dot{\theta}_1^2 + \dot{L}_2^2 \right) + mg\left(c_1 L_2 + s_1 L_{off}\right) \tag{35}$$

Deriverer Lagrangian

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = m\left(L_2^2 + L_{off}^2\right)\dot{\theta}_1 + mL_{off}\dot{L}_2 \tag{36}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{L}_2} = m\dot{L}_2 + mL_{off}\dot{\theta}_1 \tag{37}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = m\left(L_2^2 + L_{off}^2\right)\ddot{\theta}_1 + mL_2\dot{\theta}_1\dot{L}_2 + mL_{off}\ddot{L}_2 \tag{38}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{L}_2} = m\ddot{L}_2 + mL_{off}\dot{\theta}_1 \tag{39}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = (-s_1L_2 + c_1L_{off})mg \tag{40}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2} = m\dot{\theta}_1^2L_2 + c_1mg \tag{41}$$

Bruker den generelle likningen

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = u \tag{42}$$

Dette gir

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} m\left(L_2^2 + L_{off}^2\right) & mL_{off} \\ mL_{off} & m \end{bmatrix} \tag{43}$$
$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & mL_2\dot{\theta}_1 \\ -mL_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$
$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} (s_1L_2 - c_1L_{off})mg \\ -c_1mg \end{bmatrix} \tag{45}$$

Oppgave 3

a) Transformerer til Laplacedomenet.

$$s^2X + s\tfrac{d}{m}X + \tfrac{k}{m}X = U + \tfrac{1}{m}g \tag{46}$$

b) Løser likningen

$$X = \frac{U + \frac{1}{m}g}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}} \tag{47}$$

c) Likningen for PD regulator

$$u = K_pe + K_d\dot{e} \tag{48}$$

hvor $e = x_d - x$, $\dot{x}_d = 0$ og $\dot{e} = -\dot{x}$. Dette gir

$$u = K_p(x_d - x) - K_dx \tag{49}$$

Transformert til Laplacedomenet

$$U = K_p(X_d - X) - sK_dX \tag{50}$$

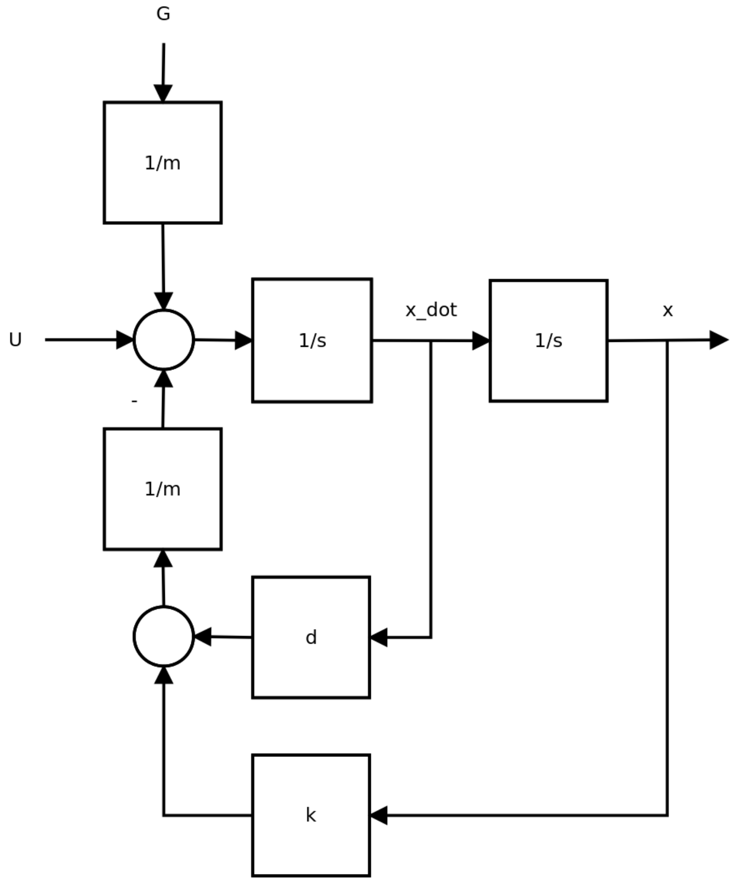

Figure 4: Blokkdiagram for oppgave 3 a

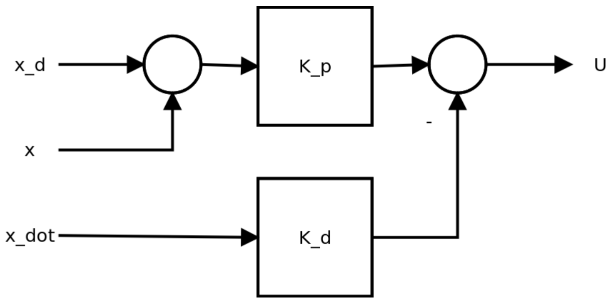

Figure 5: Blokkdiagram for oppgave 3 c

d) Setter inn (50) i (46)

$$s^2X + \tfrac{d}{m}X + \tfrac{k}{m}X = K_p(X_d - X) - sK_dX + \tfrac{1}{m}g \tag{51}$$

Dette blir

$$X = \frac{K_pX_d + \frac{1}{m}g}{s^2 + (\frac{d}{m} + K_d)s + \frac{k}{m} + K_p} \tag{52}$$

Bruker sluttverditeormet

$$\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{K_pC + \frac{1}{m}G}{s^2 + (\frac{d}{m} + K_d)s + \frac{k}{m} + K_p} = \frac{K_p}{\frac{k}{m} + K_p}C + \frac{\frac{1}{m}}{\frac{k}{m} + K_p}G \tag{53}$$

Gravitasjonskraften virker som er konstant forstyrrelse og fjærkraften lager et stasjonært avvik.

e) Bruker definisjonen på s. 212 i boka

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 \tag{54}$$

For å ha et kritisk dempet system må $\zeta = 1$. Dette git følgende likninger

$$2\omega = \tfrac{d}{m} + K_d \qquad \omega^2 = \tfrac{k}{m} + K_p \tag{55}$$

Løser man disse får man

$$K_d = 2\omega - \tfrac{d}{m} \qquad K_p = \omega^2 - \tfrac{k}{m} \tag{56}$$