

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: INF3480 - Introduksjon til Robotteknologi
Eksamensdag: 13 juni, 2016
Tid for eksamen: 14:30, 4 timer
Oppgavesettet er på 3 side(r)
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler:

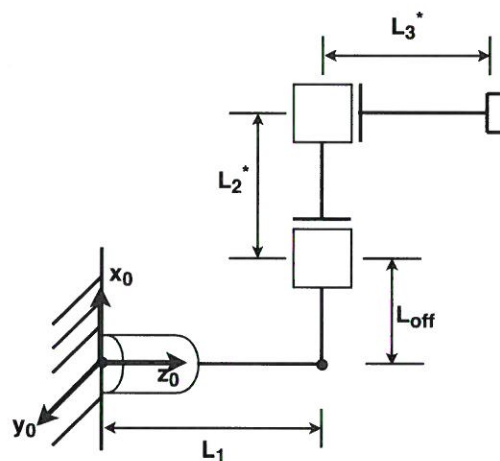
- Spong, Hutchinson and Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, 2005
- Karl Rottman, *Matematisk formelsamling* (alle utgaver)
- Godkjent kalkulator

*Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.*

Oppgave 1 (30 %)

- (7.5 %) Banegenerering (path planning) i store omgivelser gjøres ofte ved bruk av hierarkiske metoder. Hvorfor gjøres det slik? Hvorfor er ikke kontinuerlig banegenerering (path planning) en anvendelig løsning i dette tilfellet?
- (7.5 %) ROS "Plumbing" inneholder 5 hoveddeler. Forklar kort hver av dem (hva de er og hva de er benyttet til): Nodes, Topics, Services, Messages, ROS Master.
- (7.5 %) Definer hovedprosestrinnene i en Evolusjonær algoritme, og beskriv kort hver enkelt av dem. Tegn blokkdiagram.
- (7.5 %) Hva er hovedforskjellen mellom en robots kinematiske og dynamiske likningen?

Oppgave 2 (50 %)

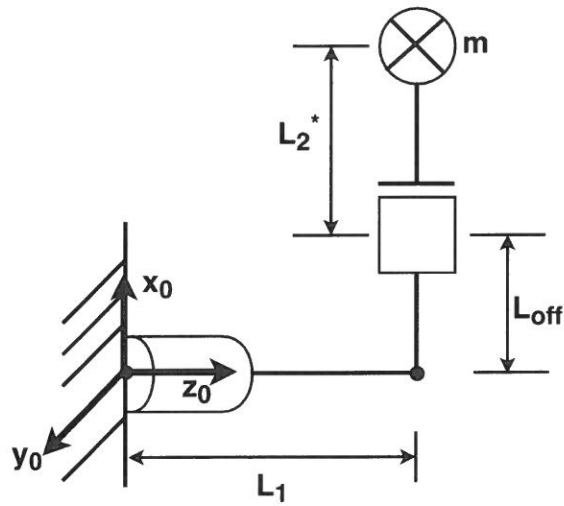


Figur 1

Figur 1 viser robotkonfigurasjonen som skal benyttes. I initiell posisjon, som vist i figur 1, beveges rotasjonsleddet omkring Z_0 -aksen, det første prismaticke leddet beveger seg i X_0 -retning og det andre prismaticke leddet i Z_0 -retning. L_1 og L_{off} er konstante lengder mellom de definerte posisjonene. L_2^* og L_3^* har nullposisjon i basen til de respektive prismaticke ledd og beveger seg utifra den nullposisjonen. Rotasjonsleddet er plassert i basen av roboten med nullposisjon som vist i figuren.

- (10 %) Angi koordinatsystemene på roboten i figur 1 ved å bruke Denavit-Hertenberg konvensjonen. Sett opp Denavit-Hertenberg parametrene til dette systemet i en tabell.
- (5 %) Utled foroverkinematikken til roboten fra basekoordinatsystemet til verktøykoordinatsystemet i enden av roboten.
- (10 %) Utled Jacobian for roboten.
- (10 %) Utled inverskinematikken for roboten.
- (5 %) Gitt $L_1 = 10$, $L_{\text{off}} = 3$, $L_2^* = [5, 10]$, $L_3^* = [5, 10]$ og ogvinkelområdet for $\theta_1 = [-135^\circ, +135^\circ]$. Regn ut de leddvariablene som kreves for å oppnå følgende posisjon $P(7, -3, 16)$. Kan denne posisjonen nåes av roboten? Diskuter resultatet.
- (5 %) Forsøk nå med $P(10.3923, 6, 18)$. Hvordan ble resultatet nå? Diskuter resultatet.
- (5 %) Beskriv og lag en skisse av arbeidsrommet til roboten. Hvilke utfordringer har roboten med hensyn til punkter som kan nåes (reachability)? Hva vil du foreslå for å forbedre arbeidsrommet?

Oppgave 3 (20 %)



Figur 2

Figur 2 viser en robot med to frihetsgrader. Dette er en forenkling av roboten i oppgave 2. Anta at den eneste massen er en punktmasse m ved vektøyet til roboten.

- (10 %) Finn Lagrangian \mathcal{L} for robotsystemet i figur 2.
- (10 %) Utled de dynamiske ligningene for roboten ved bruk av Euler-Lagrange metoden.

UNIVERSITETET I OSLO

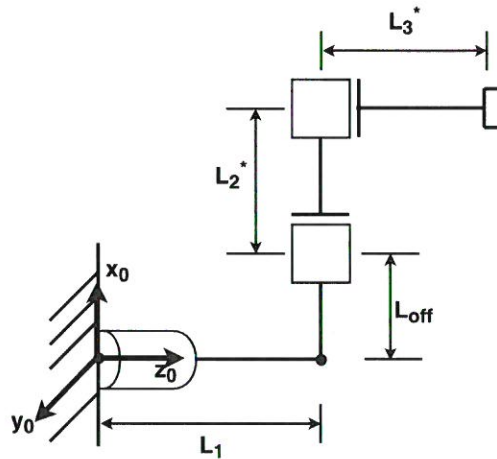
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: INF4380 - Introduksjon til Robotteknologi
Eksamensdag: 13 juni, 2016
Tid for eksamen: 14:30, 4 timer
Oppgavesettet er på 3 side(r)
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler:

- Spong, Hutchinson and Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, 2005
- Karl Rottman, *Matematisk formelsamling* (alle utgaver)
- Godkjent kalkulator

*Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.*

Oppgave 1 (50 %)

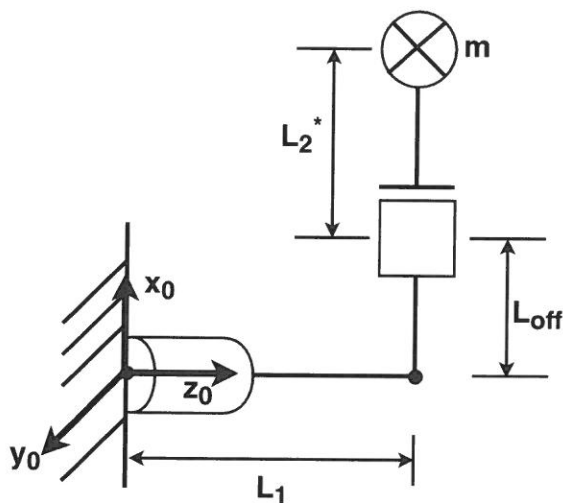


Figur 1

Figur 1 viser robotkonfigurasjonen som skal benyttes. I initiell posisjon, som vist i figur 1, beveges rotasjonsleddet omkring Z_0 -aksen, det første prismatiske leddet beveger seg i X_0 -retning og det andre prismatiske leddet i Z_0 -retning. L_1 og L_{off} er konstante lengder mellom de definerte posisjonene. L_2^* og L_3^* har nullposisjon i basen til de respektive prismatiske ledd og beveger seg utifra den nullposisjonen. Rotasjonsleddet er plassert i basen av roboten med nullposisjon som vist i figuren.

- (10 %) Angi koordinatsystemene på roboten i figur 1 ved å bruke Denavit-Hertenberg konvensjonen. Sett opp Denavit-Hertenberg parametrene til dette systemet i en tabell.
- (5 %) Utled foroverkinematikken til roboten fra basekoordinatsystemet til verktøykoordinatsystemet i enden av roboten.
- (10 %) Utled Jacobian for roboten.
- (10 %) Utled inverskinematikken for roboten.
- (5 %) Gitt $L_1 = 10$, $L_{\text{off}} = 3$, $L_2^* = [5, 10]$, $L_3^* = [5, 10]$ og ogvinkelområdet for $\theta_1 = [-135^\circ, +135^\circ]$. Regn ut de leddvariablene som kreves for å oppnå følgende posisjon $P(7, -3, 16)$. Kan denne posisjonen nåes av roboten? Diskuter resultatet.
- (5 %) Forsøk nå med $P(10.3923, 6, 18)$. Hvordan ble resultatet nå? Diskuter resultatet.
- (5 %) Beskriv og lag en skisse av arbeidsrommet til roboten. Hvilke utfordringer har roboten med hensyn til punkter som kan nåes (reachability)? Hva vil du foreslå for å forbedre arbeidsrommet?

Oppgave 2 (20 %)



Figur 2

Figur 2 viser en robot med to frihetsgrader. Dette er en forenkling av roboten i oppgave 1. Anta at den eneste massen er en punktmasse m ved vektøyet til roboten.

- (10 %) Finn Lagrangian \mathcal{L} for robotsystemet i figur 2.
- (10 %) Utled de dynamiske ligningene for roboten ved bruk av Euler-Lagrange metoden.

Oppgave 3 (30 %)

I denne oppgaven tenker vi oss at L_2^* i figur 2 har konstant lengde med lengde lik L_2 ($\dot{L}_2 = 0$), og vi gjør forenklingen at $\sin(\theta_1) = \theta_1$ for små vinkler.

- (7.5 %) Finn den dynamiske likningen (bevegelseslikningen) til det gjeldende systemet (i tidsdomenet), sett den opp på formen:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = \tau$$

og finn J , b og k .

- (7.5 %) Transformer den dynamiske likningen over til Laplace-domenet. Tegn opp blokkdiagrammet til det tilbakekoblede systemet (closed loop system) to ganger:
 - først ved bruk av en P-regulator
 - deretter ved bruk av en PI-regulator
- (7.5 %) Sett opp transferfunksjonen (overføringsfunksjonen) mellom input (ønsket vinkel) og utgang (oppnådd vinkel) til det tilbakekoblede systemet over både i tilfellet med bruk av P-regulator og i tilfellet med bruk av PI-regulator. Bruk sluttverditeoremet (steady-state theorem) for å finne reguleringsavviket (steady-state value) for henholdsvis P-regulator og PI-regulator ved "step input" (direkte fra null til en fast verdi) både for ønsket vinkel og forstyrrelse. Hva sier resultatet deg? Diskuter.
- (7.5 %) Hvordan ville du undersøke stabilitetsegenskapene til det dynamiske systemet? Hva må til for at systemet over skal være stabilt?

Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	28. $u_c(t) g(t)$	$e^{-cs} \mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$	32. $\int_0^t f(v) dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		

Part 1: Open Questions

Solveig's lecture

- Path planning in large environments is often done using a hierarchical methods. What's the reason for it? Why it cannot be done with continuous path planning?

Answer

Continuous path planning in large environments is bad because:

- Search space is too large, too many solutions available
- Too slow in large environments
- Search paths can become too complex and solution might not be found

Hierarchical methods in large environments are good because:

- It searches general solution at first and finds precise path for smaller blocks of the map
- Works much faster than continuous path planning in the same sized (considering large) environments
- Is able to achieve similar accuracy

ROS

Question 1

ROS "Plumbing" part consists of 5 main parts, please briefly explain each of them:

- Nodes
- Topics
- Services
- Messages
- ROS Master

Answer to Question 1:

- **Nodes:** Nodes are processes that perform computation, "executables"
- **Topics:** Topics are streams of data with publish / subscribe semantics. They are uniquely identifiable by its name
- **Services:** Request / reply is done via services, which are defined by a pair of message structures: one for the request and one for the reply.
- **Messages:** A message is simply a data structure, comprising typed fields. Language agnostic data representation. C++ can talk to Python.

- **ROS Master:** The ROS Master provides name registration and lookup to nodes. Without the Master, nodes would not be able to find each other, exchange messages, or invoke services.

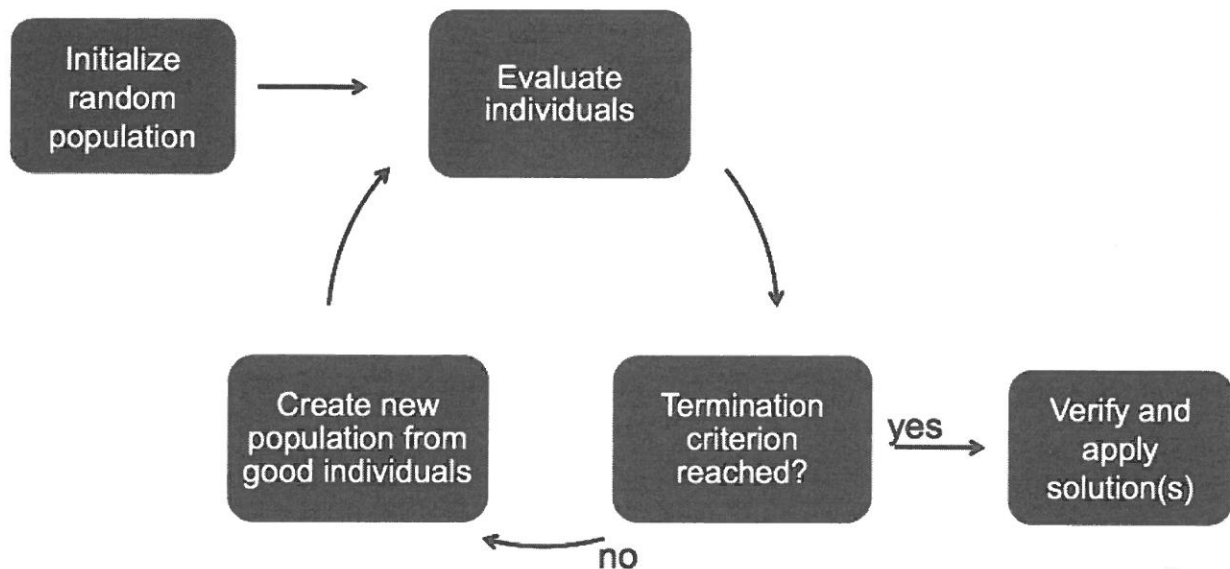
Evolutionary Robotics

Question 1

Define the main steps of Evolutionary Algorithm and briefly describe each one of them.

Answer to Question 1

1. Initialize random population
2. Loop
 - a. Evaluate individuals
 - b. Check if termination criterion reached?
 - i. If yes, Exit loop
 - c. Create new population from good individuals
 - d. Back to a)
3. Verify and apply solution(s)



Dynamics

Question 1

What is the difference between robot's kinematic equations and dynamics?

Answer

While the kinematic equations describe the motion of the robot without consideration of the forces that produces the motion.

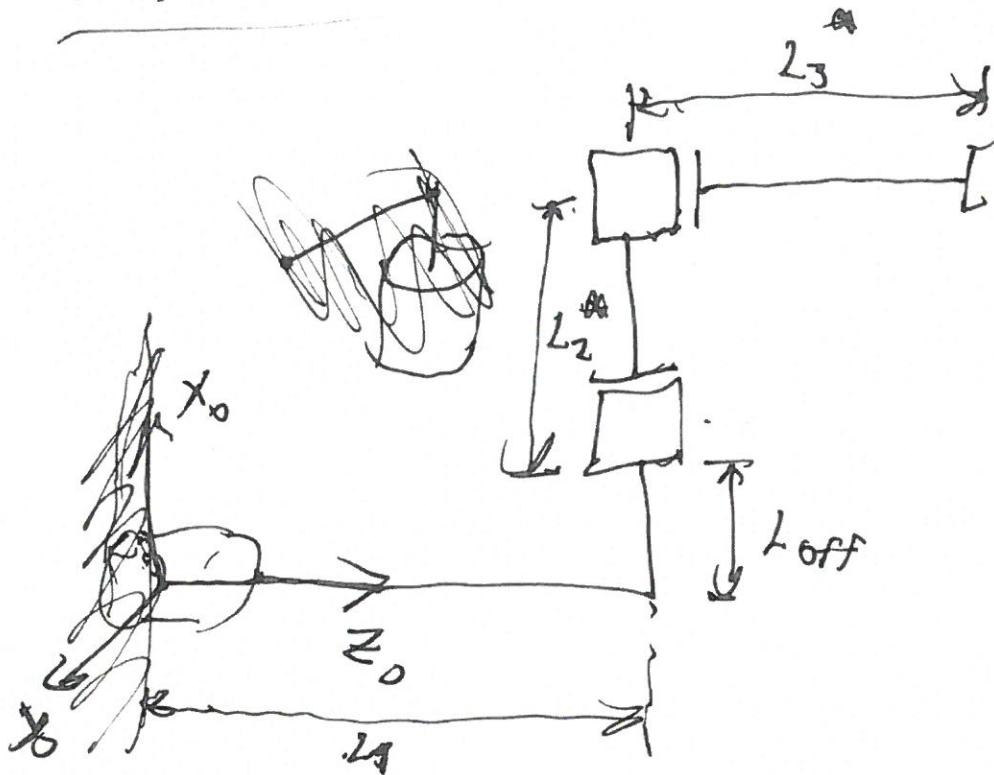
The dynamics explicitly describe the relationship between force and motion.

The dynamic of the robot is necessary to consider in the design of robots, simulation and animation, and in the design of control algorithms.

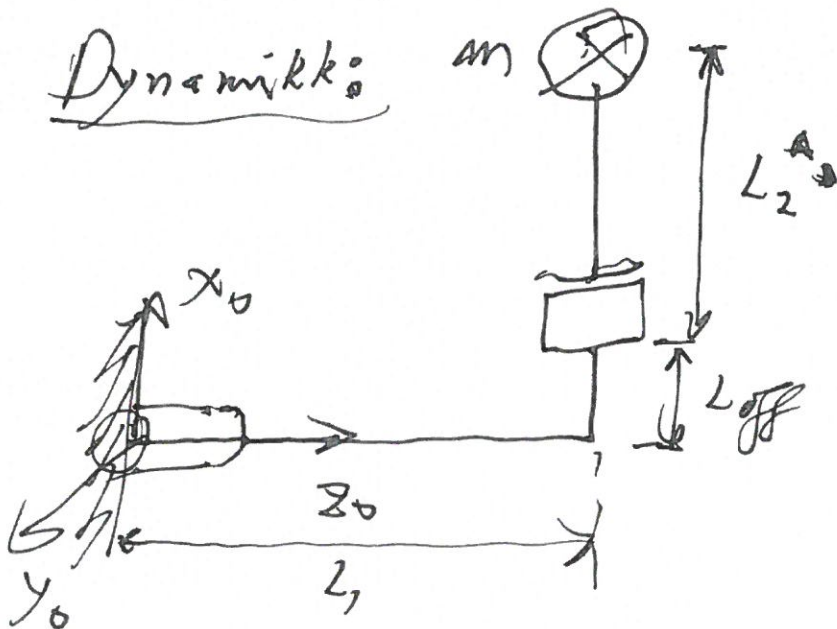
Control

- Stability – The closed-loop stability of these systems is determined by the roots of the characteristic polynomial – If all roots (potentially complex) are in the 'left-half' plane, our system is stable
- for any bounded input and disturbance – A description of how the roots of the characteristic equation change (as a function of controller gains) is very valuable
- Called the root locus

Kinematikk:

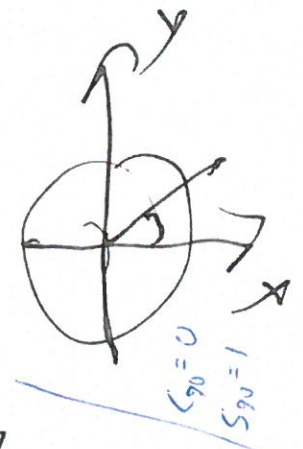
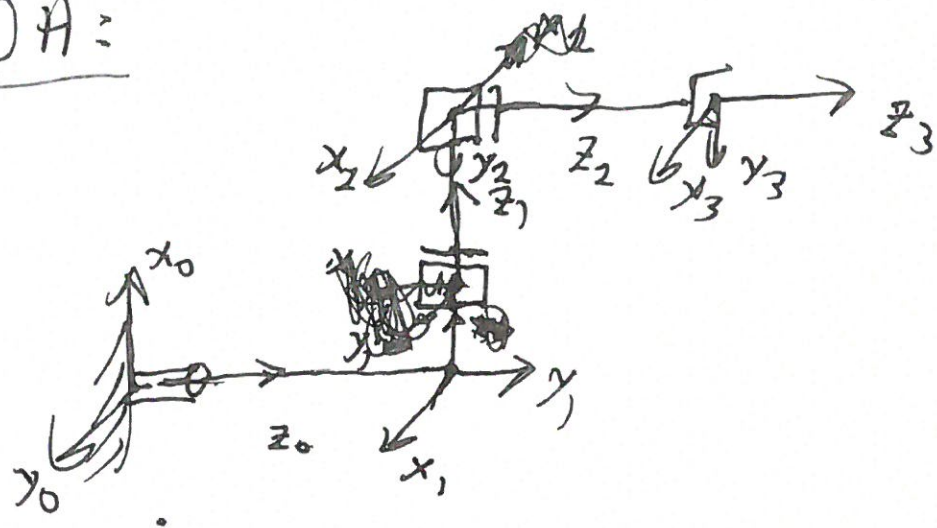


Dynamikk:



DA:

1 a)



i	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	0	L_1	90°	$\theta_1 + 90^\circ$
2	0	$L_2 + L_{off}$	-90°	0
3	0	L_3	0	0

$C(\theta) = \begin{bmatrix} C_{\theta} & S_{\theta} \\ -S_{\theta} & C_{\theta} \end{bmatrix}$
 $S(\theta) = \begin{bmatrix} S_{\theta} & C_{\theta} \\ C_{\theta} & S_{\theta} \end{bmatrix}$

1 b)

~~$A_1 = \begin{bmatrix} C(\theta, +90) & 0 & S(\theta, +90) & 0 \\ S(\theta, +90) & 0 & -C(\theta, +90) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$~~

$A_2 = \begin{bmatrix} C(\theta, +90) & 0 & S(\theta, +90) & 0 \\ S(\theta, +90) & 0 & -C(\theta, +90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T_1^0 = A_1 = \begin{bmatrix} -S_\theta & 0 & C_\theta & 0 \\ C_\theta & 0 & S_\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} -S_\theta & 0 & C_\theta & 0 \\ C_\theta & 0 & S_\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_2^* + L_{off} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -S_\theta & -C_\theta & 0 & C_\theta(L_2^* + L_{off}) \\ C_\theta & -S_\theta & 0 & S_\theta(L_2^* + L_{off}) \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} -S_\theta & -C_\theta & 0 & C_\theta(L_2^* + L_{off}) \\ C_\theta & -S_\theta & 0 & S_\theta(L_2^* + L_{off}) \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

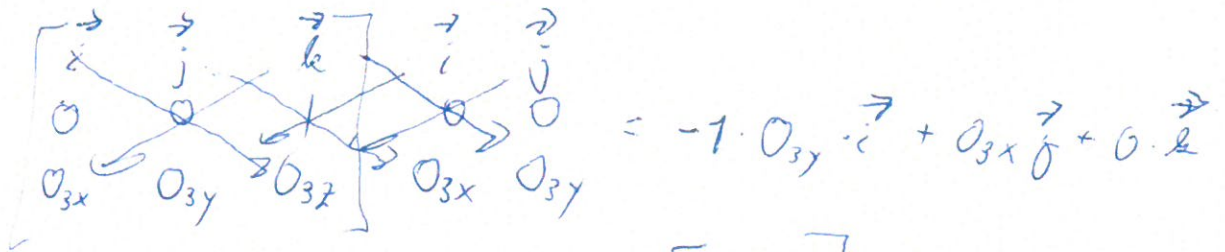
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_\theta & -C_\theta & 0 & C_\theta(L_2^* + L_{off}) \\ C_\theta & -S_\theta & 0 & S_\theta(L_2^* + L_{off}) \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forward kinematics.

1c) Jacobiam: $0_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; 0_3 = \begin{bmatrix} c_\theta(L_2^* + L_{off}) \\ s_\theta(L_2^* + L_{off}) \\ L_3^* + L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3x} \\ 0_{3y} \\ 0_{3z} \end{bmatrix} \quad (4)$

$$J = \begin{bmatrix} J_r \\ J_w \end{bmatrix}; z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; z_1 = \begin{bmatrix} c_\theta \\ s_\theta \\ 0 \end{bmatrix}; z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_{r1} &= z_0 \times (0_3 - 0_0) \\ J_{r2} &= z_1 \\ J_{r3} &= z_2 \\ J_{w1} &= z_0 \\ J_{w2} &= 0 \\ J_{w3} &= 0 \end{aligned}$$

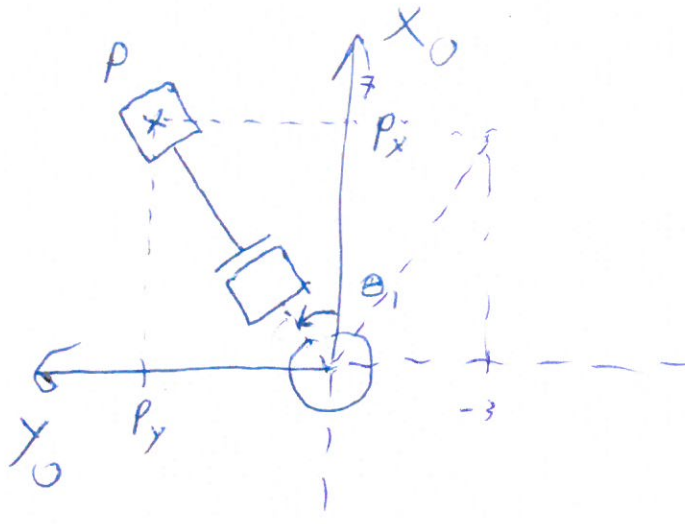


$$= \begin{bmatrix} -0_{3y} \\ 0_{3x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

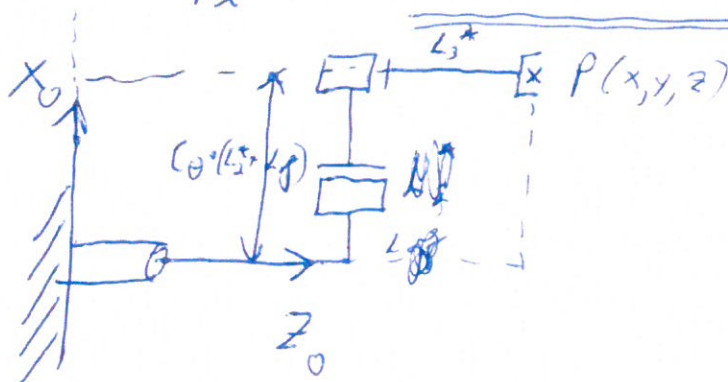
$$J = \begin{bmatrix} J_r \\ J_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_\theta(L_2^* + L_{off}) & c_\theta & 0 \\ c_\theta(L_2^* + L_{off}) & s_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1d) Inverse Kinematics:

(5)



$$\tan(\theta_1) = \frac{P_y}{P_x} \Rightarrow \theta_1 = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$



①

$$\begin{aligned} \cos(\theta)(L_2^* + L_{off}) &= P_x \Rightarrow L_2^* = \frac{P_x - L_{off} \cos(\theta)}{\cos(\theta)} \\ \sin(\theta)(L_2^* + L_{off}) &= P_y \Rightarrow L_2^* = \frac{P_y - L_{off} \sin(\theta)}{\sin(\theta)} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} L_2^* = \frac{P_x}{\cos(\theta)} - L_{off}$$

$$L_3^* + L_1 = P_2 \Rightarrow \underline{L_3^* = P_2 - L_1}$$

oder...

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \pm \sqrt{P_x^2 + P_y^2} &= L_{off} + L_2^* \quad \leftarrow P_x^2 + P_y^2 = (L_{off} + L_2^*)^2 \\ \Rightarrow \underline{L_2^*} &= \pm \sqrt{P_x^2 + P_y^2} - L_{off} \end{aligned}$$

6

$$L_3^* [8 - 10]$$

$$L_2^* [5 - 10]$$

$$L_{off} = 3$$

$$\Theta_1 [-135, 135]$$

$$L_1 = 10$$

$$L_3^* = 8$$

$$L_1 = 10$$

$$L_{off} = 3$$

$$L_2^* = 9; \theta_1 = 30^\circ$$

$$\Rightarrow L_2^* + L_{off}$$

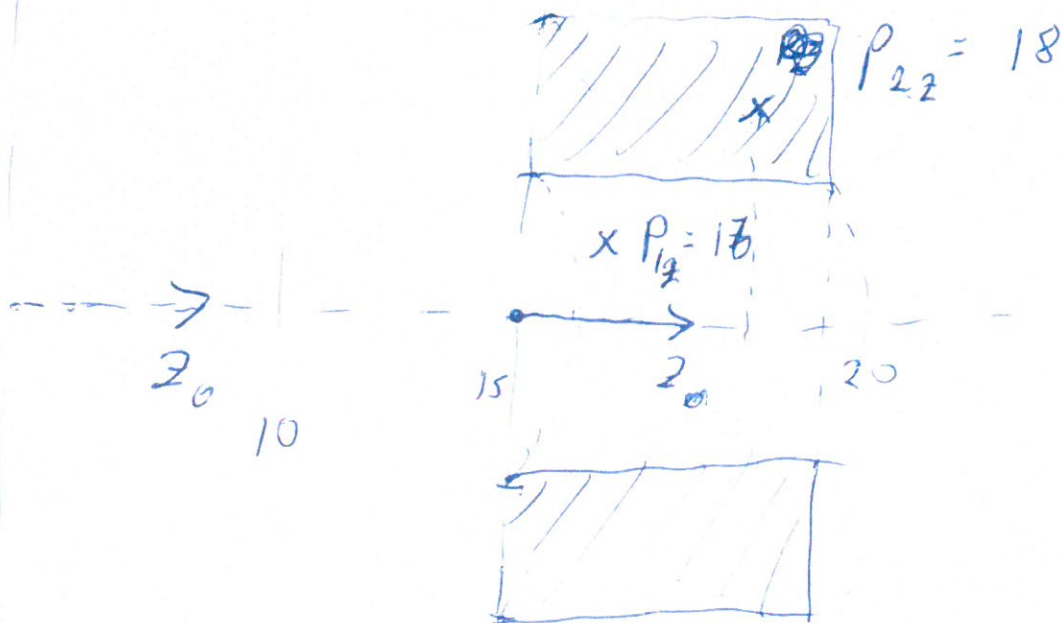
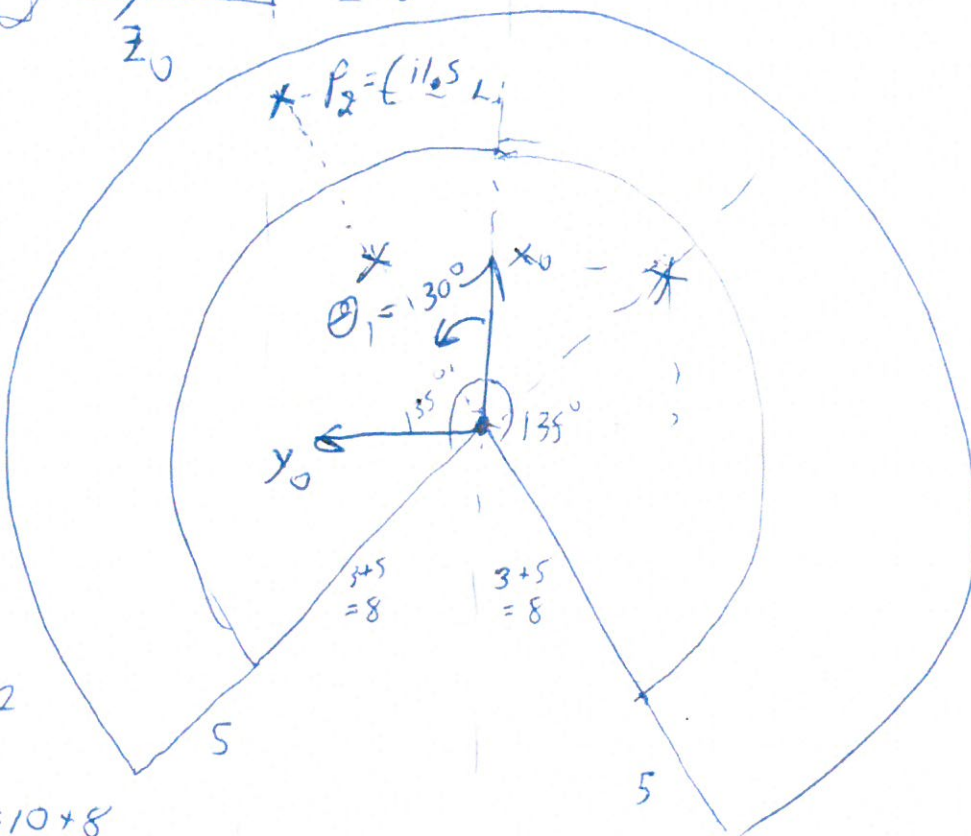
$$\cos L_2^* + \cos L_{off} = P_x$$

$$\Rightarrow P_x = \cos(30^\circ) \cdot 12$$

$$= \underline{\underline{10,3923}}$$

$$P_{2y} = \underline{\underline{6}} = \sin 30 \cdot 12$$

$$P_{2z} = \underline{\underline{18}} = L_1 + L_3^* = 10 + 8$$



1) ~~1)~~ f. b.

(7)

$$\begin{aligned} \text{Gitt: } L_1 &= 10 & \Theta_1^* &\in [-135^\circ, 135^\circ] \\ L_{\text{off}} &= 3 & L_2^* &\in [5, 10] \\ & & L_3^* &\in [5, 10] \end{aligned}$$

{ Joint variables needed to reach:
 $P_2 = (10.3923, 6, 18)$

\Rightarrow Investigation: $\Theta_1 = \arctan\left(\frac{6}{10.3923}\right) = 30^\circ$

$$L_2^* = \frac{10.3923}{\cos 30^\circ} - 3 = \underline{\underline{8.99999 \approx 9}}$$

$$L_3^* = 18 - 10 = \underline{\underline{8}}$$

e) ~~1)~~ How med: $P_1 = (7, -3, 16)$

$$\Rightarrow \Theta_1 = \arctan\left(\frac{-3}{7}\right) = \cancel{115.38^\circ} = -23.2^\circ$$

$$L_2^* = \frac{7}{\cos(115.38^\circ)} - 3 = \cancel{-19.33} = 9.61$$

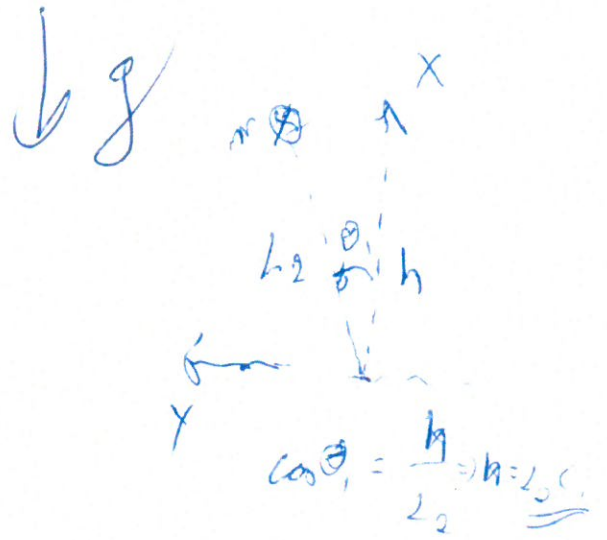
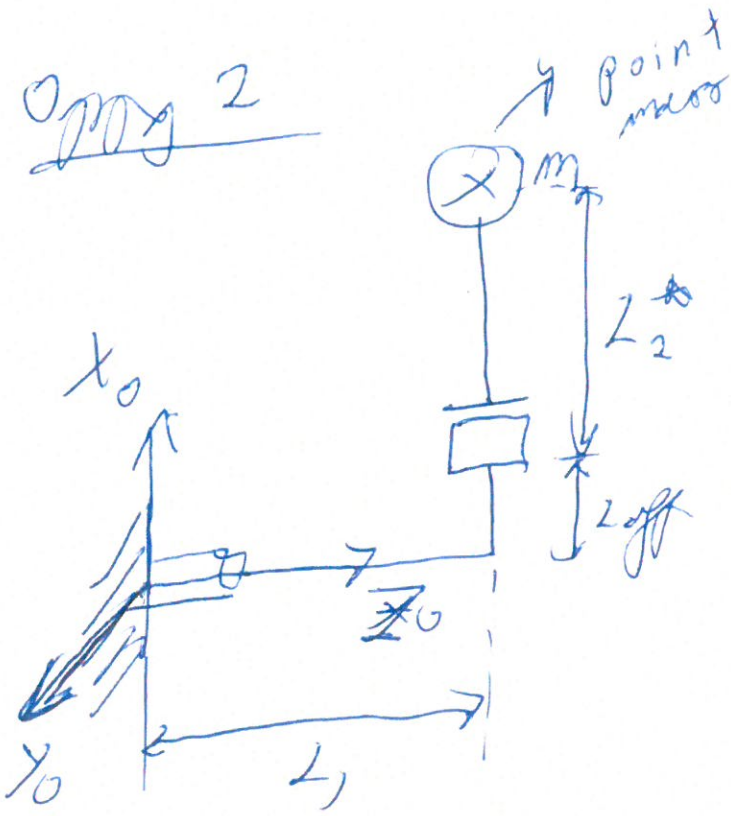
$$L_3^* = 16 - 10 = 6$$

Er dette ok? \Rightarrow Nei $L_2^* < 5$!

g) Workspace of the robot.

Opng 2

8



a) Lagrangian:

$$N = J_{\pi} \cdot \dot{q}$$

$$J_{\pi} = \begin{bmatrix} -s_{\theta}(L_2^* + L_{off}) & c_{\theta} & 0 \\ c_{\theta}(L_2^* + L_{off}) & s_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{L}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -s_{\theta} \overbrace{(L_2^* + L_{off})}^{L_2} \dot{\theta} + c_{\theta} \dot{L}_2 + 0 \\ c_{\theta} \overbrace{(L_2^* + L_{off})}^{L_2} \dot{\theta} + s_{\theta} \dot{L}_2 + 0 \\ 0 \dot{\theta} + 0 \cdot \dot{L}_2 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{\theta} L_2 \dot{\theta} + c_{\theta} \dot{L}_2 \\ c_{\theta} L_2 \dot{\theta} + s_{\theta} \dot{L}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow N^2 = ?$

$$N^2 = \begin{bmatrix} -s_1 L_2 \dot{\theta}_1 + c_1 \dot{z}_2 & c_1 L_2 \dot{\theta}_1 + s_1 \dot{z}_2 \\ c_1 L_2 \dot{\theta}_1 + s_1 \dot{z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_1 L_2 \dot{\theta}_1 + c_1 \dot{z}_2 \\ c_1 L_2 \dot{\theta}_1 + s_1 \dot{z}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(-s_1 L_2 \dot{\theta}_1 + c_1 \dot{z}_2)^2 + (c_1 L_2 \dot{\theta}_1 + s_1 \dot{z}_2)^2}}$$

$$\begin{array}{l} (c_1 L_2 \dot{\theta}_1 + s_1 \dot{z}_2)(c_1 L_2 \dot{\theta}_1 + s_1 \dot{z}_2) \\ = c_1^2 L_2^2 \dot{\theta}_1^2 + s_1^2 \dot{z}_2^2 + 2s_1 c_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{z}_2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} (-s_1 L_2 \dot{\theta}_1 + c_1 \dot{z}_2)(-s_1 L_2 \dot{\theta}_1 + c_1 \dot{z}_2) \\ = s_1^2 L_2^2 \dot{\theta}_1^2 + c_1^2 \dot{z}_2^2 - 2s_1 c_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{z}_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow = L_2^2 \dot{\theta}_1^2 (c_1^2 + s_1^2) + \dot{z}_2^2 (s_1^2 + c_1^2) = \underline{\underline{L_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{z}_2^2 = N^2}}$$

$$h = \overbrace{(L_2^2 + L_2^{*2})}^{L_2} c_1 = \underline{\underline{L_2 c_1 = c_1 L_2}}$$

Lagrangian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= K - P = \frac{1}{2} m N^2 - mgh \\ &= \frac{1}{2} m N^2 - mgh \\ &= \frac{1}{2} m (L_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{z}_2^2) - mg c_1 L_2 \end{aligned}$$

$$b) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m L_2^2 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{L}_2} = m \dot{L}_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m L_2^2 \ddot{\theta}_1 + 2 m L_2 \dot{L}_2 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{L}_2} = m \ddot{L}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = + m g S_1 L_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial L_2} = m L_2 \dot{\theta}_1^2 - m g C_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases} = \begin{cases} m L_2^2 \ddot{\theta}_1 + 2 m L_2 \dot{L}_2 \dot{\theta}_1 - m g S_1 L_2 = F_1 \\ m \ddot{L}_2 - m L_2 \dot{\theta}_1^2 + m g C_1 = F_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m L_2^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{L}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 m L_2 \dot{L}_2 \dot{\theta}_1 \\ - m L_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - m g S_1 L_2 \\ m g \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \frac{1}{2} m L_0^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{L}_2^2 - m g L_2 C_1$$

Oppg 3

For the rest of the exercise
we assume L_2 is fixed ($L_2 = 0$)
and that we can approximate $\sin(\theta) \approx \theta$,
for small angles.

(11)

a) c) Get the dynamic equation of
the resulting system ~~(in the time domain)~~
into the form:

$$J \ddot{\theta} + b \dot{\theta} + k \theta = \tau$$

and find J , b and k

b) d) - Transform the dynamic equation
into the Laplace domain.

- Draw the closed loop block diagram of
the system ~~using~~ twice, first using a
P-controller, and then using a PI-controller.

- Find the transfer function ~~for~~ of the closed
loop system.

e) - Use the steady-state theorem
and find the steady state error using
a P and a PI-controller respectively.

f) - How do you investigate the stability
of a dynamic system?
- What ~~is~~ would make the system
almost stable?

Lösning öppg 3

Bewegelsekvationer för b)

a) c)

$$m L_2 \ddot{\theta}_1 + 2m L_2 \dot{L}_2 \dot{\theta}_1 - mg S_1 L_2 = \tau_1$$

$$m L_2^2 \ddot{\theta}_1 - m L_2 \dot{\theta}_1^2 - mg C_1 = F_2$$

⇒ - Reducera med 100% vid $L_2 = \text{konstant} \Rightarrow \dot{L}_2 = 0$

- Förklarar skillnad av $\sin \theta, 2 \theta$, för små vinklar

⇒ Kan först bevegelsekvation gälla sedan
ikke led 2 - primitiv jämfört er med

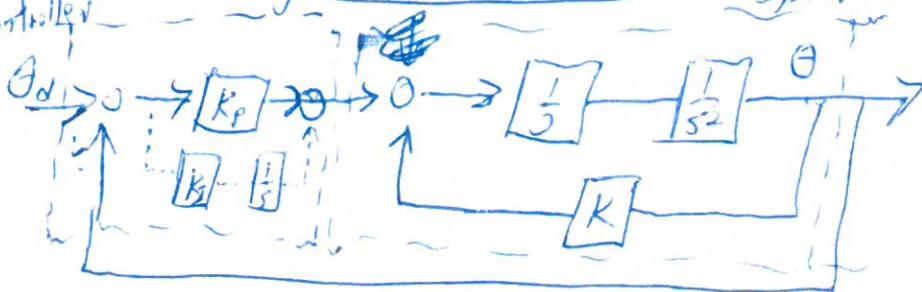
Time domain

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m L_2^2 \ddot{\theta}_1 - mg \theta_1 L_2 = \tau_1 \\ \text{hvor } J = m L_2^2 \\ b = 0 \\ k = mg L_2 \end{array} \right\} J \ddot{\theta} + b \dot{\theta} + k \theta = \tau$$

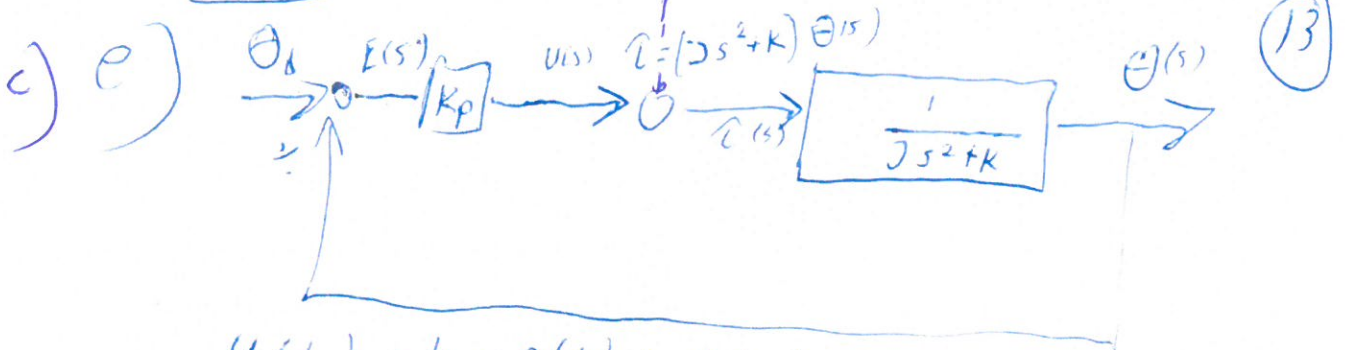
b) d) Laplace domain:

$$J \theta(s) \cdot s^2 + k \theta(s) = \tau(s)$$

Block diagram with P-controller and PI-controller system



P-Contr:



$$u(t) = k_p \cdot e(t); \quad e(t) = \Theta_d(t) - \Theta(t)$$

$$U(s) = K_p \cdot E(s)$$

(I)

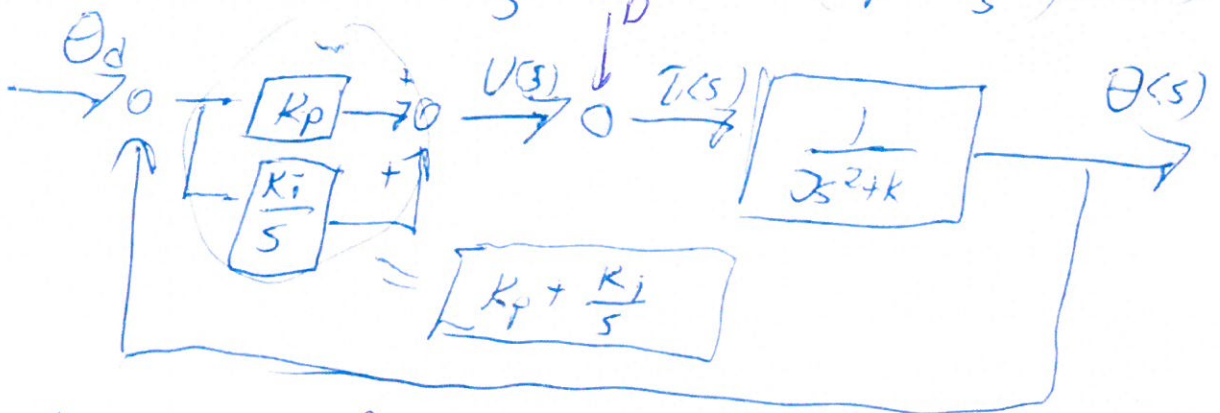
Transferfunktion: ~~$U(s) = (Js^2 + k)\Theta(s) = K_p(\Theta_d - \Theta) - D$~~

~~$\Rightarrow \Theta(s) = \frac{K_p \Theta_d - D}{Js^2 + k}$~~

PI-Contr:

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + k_i \int e(t) dt$$

$$\Rightarrow U(s) = K_p \cdot E(s) + \frac{K_i}{s} \cdot E(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) E(s) - D$$



(II) \Rightarrow Transferfunktion: $U(s) = (Js^2 + k)\Theta(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) (\Theta_d - \Theta) - D$

P-reg:

(I) $(Js^2 + K) \Theta(s) = K_p (\Theta_d - \Theta) - D$

$\Theta(Js^2 + K + K_p) = K_p \Theta_d - D$

$\Rightarrow \Theta = \frac{K_p \Theta_d - D}{Js^2 + K + K_p}$; $D_{stop} = \frac{1}{s} D$; $\Theta_{d,stop} = \frac{1}{s} \Theta_d$

$\Rightarrow \Theta = \frac{K_p \cdot \frac{1}{s} \cdot \Theta_d - \frac{1}{s} D}{Js^2 + K + K_p}$

Stabilitätskriterium: $\lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Theta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_p \cdot \frac{1}{s} \Theta_d - \frac{1}{s} D}{Js^2 + K + K_p}$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_p \Theta_d - D}{Js^2 + K + K_p} = \frac{K_p \Theta_d - D}{K + K_p}$

(II) PI-reg:

$(Js^2 + K) \Theta(s) = (K_p + \frac{K_I}{s}) (\Theta_d - \Theta) - D$

$\Theta(Js^2 + K + K_p + \frac{K_I}{s}) = K_p \Theta_d + \frac{K_I}{s} \Theta_d - D$; $step \Theta_d \text{ of } D \Rightarrow$

\Rightarrow Stabilitätskriterium mit step input of feedback:

$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Theta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_p \Theta_d + \frac{K_I}{s} \Theta_d - D}{Js^2 + K + K_p + \frac{K_I}{s}}$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_p \Theta_d \cdot s + K_I \cdot \Theta_d - D \cdot s}{s \cdot Js^2 + K \cdot s + K_p \cdot s + K_I} = \frac{K_I \Theta_d}{K_I} = \Theta_d$

\Rightarrow system is stable Θ_d when steady state error is zero feedback.

d) The stability of a dynamic system can be investigated by finding the poles of the characteristic equation of the system, and see if they are in the left-half plane (stable).

- In the above case, this means:

P-reg: $Js^2 + K + K_p = 0 \Rightarrow s = \pm \sqrt{\frac{K + K_p}{J}}$

PI-reg: $Js^2 + K + K_p + \frac{K_I}{s} = 0 \Rightarrow Js^3 + (K + K_p)s + K_I = 0$
 \Rightarrow Routh-Hurwitz to solve!

