Søking i strenger

- Vanlige søkealgoritmer (*on-line*-søk)
  - Prefiks-søking — Naiv algoritme
    Knuth-Morris-Pratt-algoritmen
  - Suffiks-søking — Boyer-Moore-algoritmen
  - Hash-basert — Karp-Rabin-algoritmen

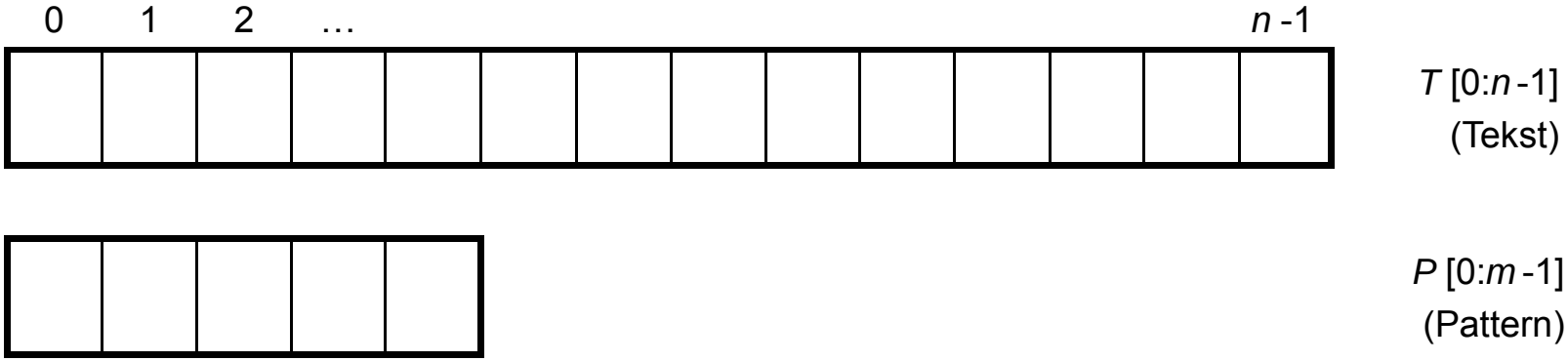
- Indeksering av tekst
  - Datastrukturer — Trie-trær
    Suffiks-trær

Definisjoner

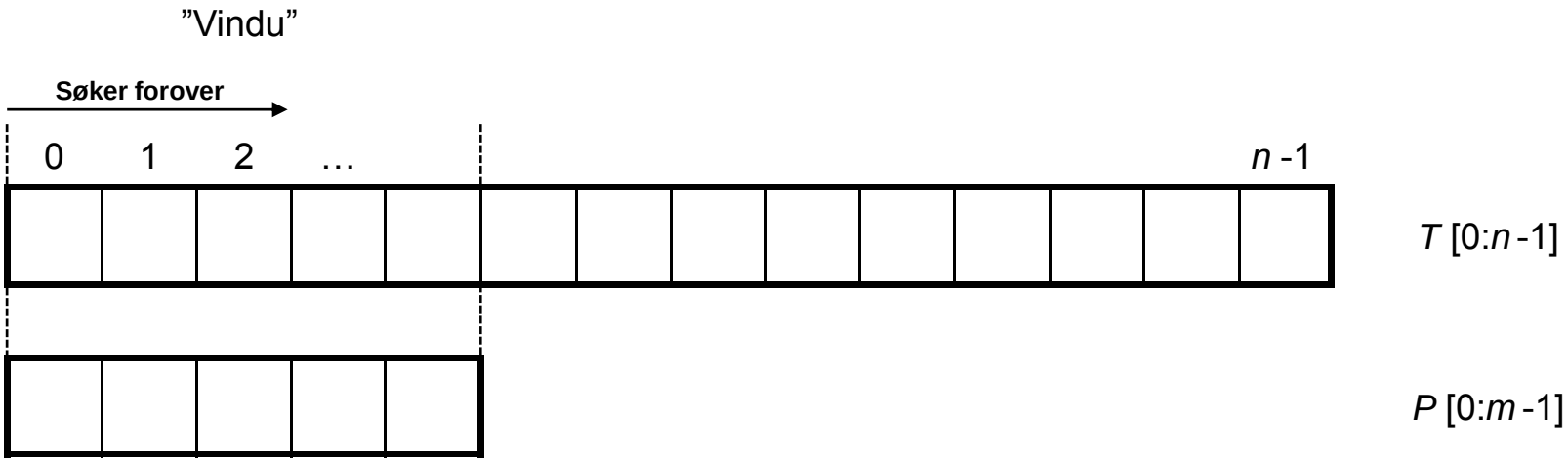
Et **alfabet** er en mengde symboler $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

En **streng** $S = S[0{:}n-1]$ av lengde n er en sekvens av symboler fra A.

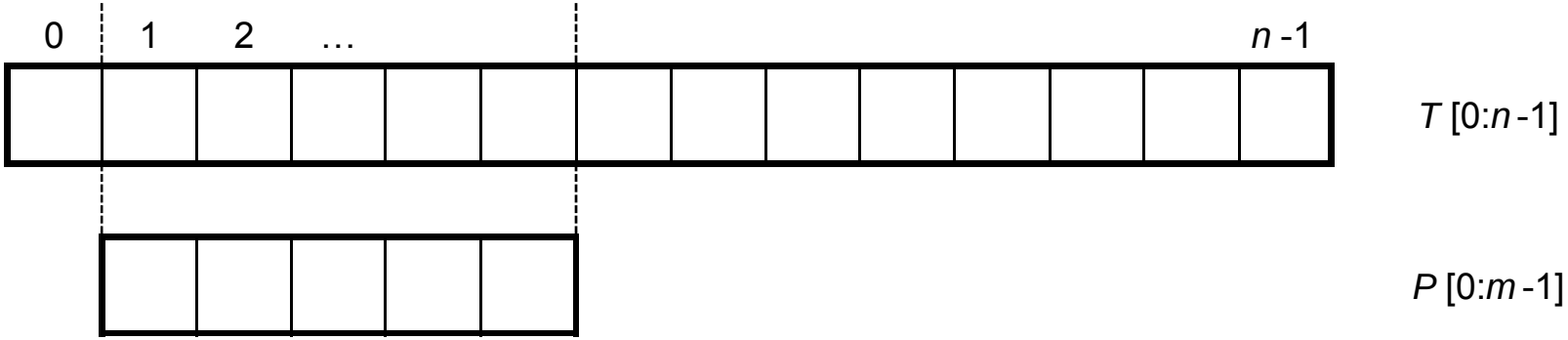
(Vi kan se på strengen S både som et array $S[0{:}n-1]$ og som en sekvens av symboler $S=s_1 s_2 \ldots s_{n-1}$.)



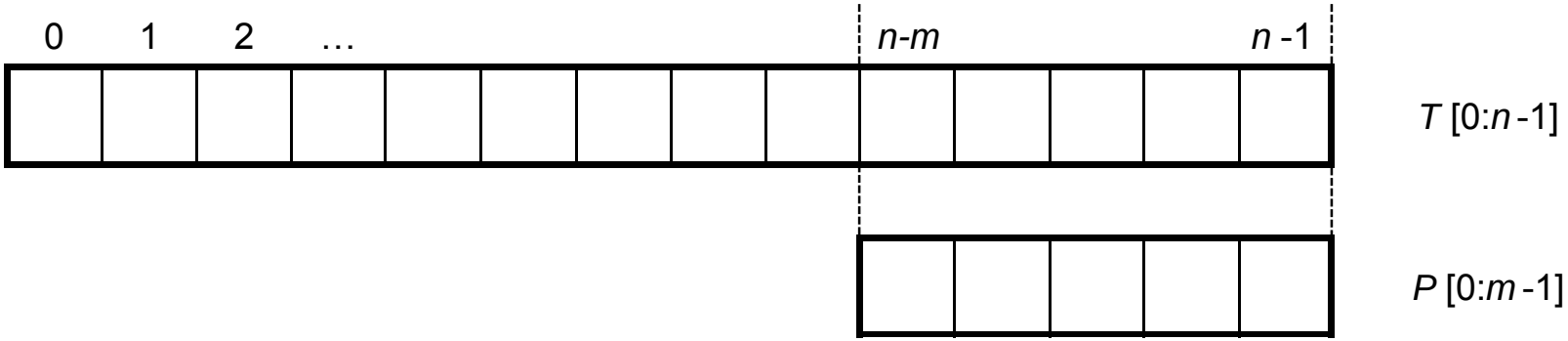
Naiv algoritme



Naiv algoritme



Naiv algoritme




```
function NaiveStringMatcher (P [0:m -1], T [0:n -1])
    for s ← 0 to n - m do
        if T [s :s + m -1] = P  then
            return(s)
        endif
    endfor
    return(-1)
end NaiveStringMatcher
```

for-løkka eksekveres $n - m + 1$ ganger.
Hver sjekk inntil m symbolsammenlikninger.

$O(nm)$ kjøretid (worst case)

Knuth-Morris-Pratt-algoritmen

Det er, algoritmeteoretisk sett, rom for forbedringer av den naive algoritmen.

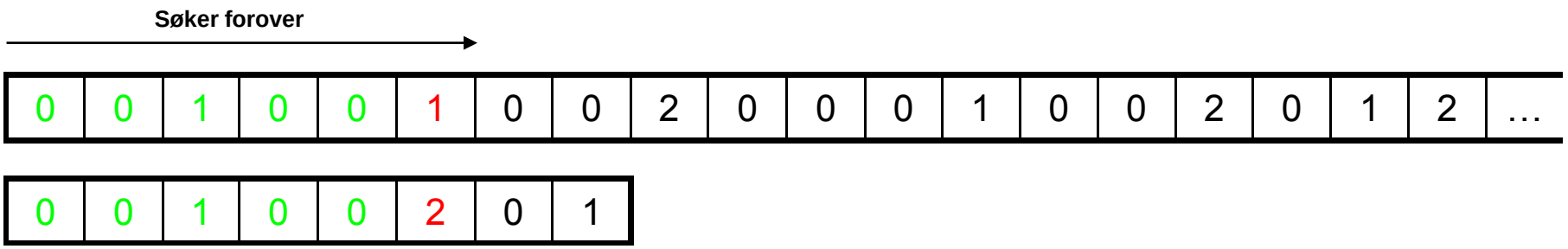
Den flytter vinduet/patternet bare ett hakk i hvert steg.

Kan vi kanskje flytte mer enn bare ett steg?

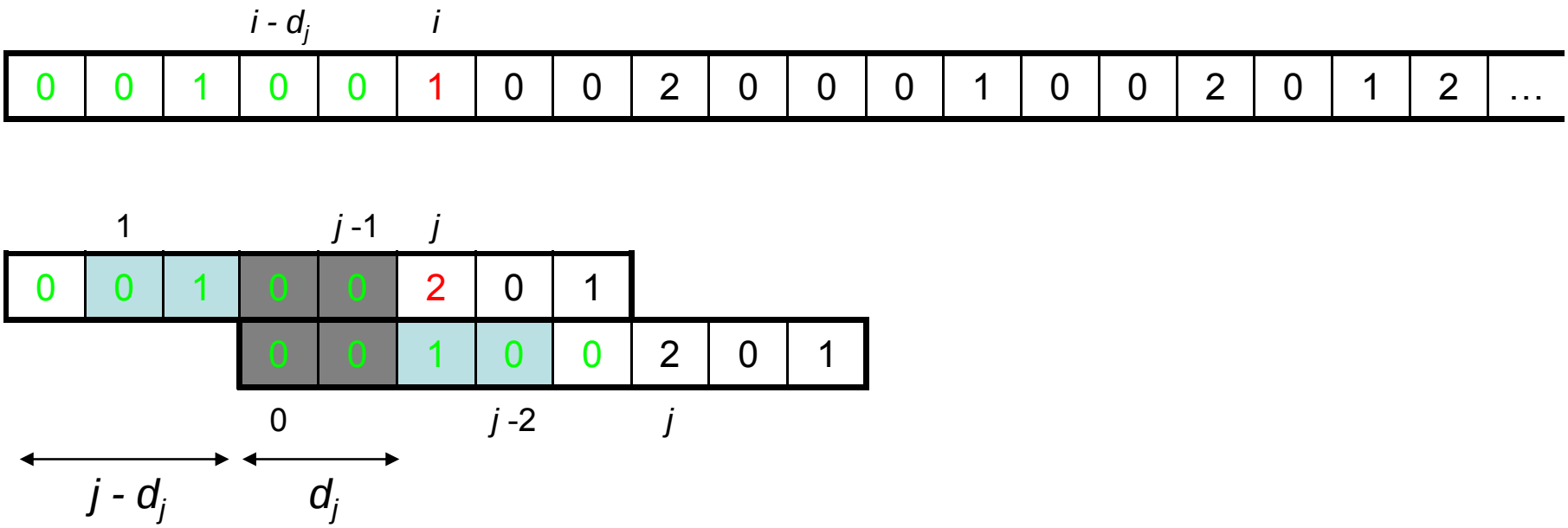
0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	1	0	0	2	0	1	2	…

0	0	1	0	0	2	0	1

Knuth-Morris-Pratt-algoritmen



Knuth-Morris-Pratt-algoritmen



d_j er lengden av
lengste suffix av P [1 : j -1] som også er prefix av P [0 : j - 2]

Vi vet nå at vi kan flytte P $j - d_j$ steg.
Og vi vet at P [0 : d_j -1] matcher T, så vi kan starte å sammenlikne med P [d_j : m-1].

```
function KMPStringMatcher (P [0:m -1], T [0:n -1])
    i ← 0   // indeks i T
    j ← 0   // indeks i P
    CreateNext(P [0:m -1], Next [n -1])
    while i < n do
        if P [ j ] = T [ i ] then
            if j = m –1 then                    // sjekker full match
                return(i – m + 1)
            endif
            i ← i + 1
            j ← j + 1
        else
            j ← Next [ j ]
            if j = 0 then
                if T [ i ] ≠ P [0] then
                    i ← i + 1
                endif
            endif
        endif
    endwhile
    return(-1)
end KMPStringMatcher
```

$O(n)$

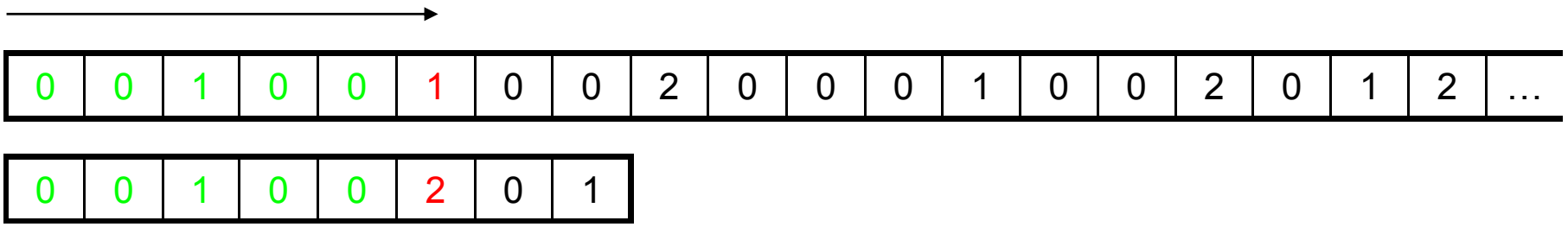
```
function CreateNext (P [0:m -1], Next [0:m -1])
    Next [ 0 ] ← Next [ 1 ] ← 0          // mismatch i rute 0 eller 1 gir ikke overlapp
    i ← 2                                // i er indeksen for mismatch
    j ← 0                                // j indeks teller lengden av overlapp
    while i < m do
        if P [ j ] = P [ i - 1 ] then
            Next [ i ] ← j + 1
            i ← i + 1
            j ← j + 1
        else                             // ikke likhet
            if j > 0 then
                j ← Next [ j ]           (Trykkfeil i boka)
            else
                Next [ i ] ← 0
                i ← i + 1
            endif
        endif
    endwhile                                          O(m)
end CreateNext
```

```
function CreateNext (P [0:m -1], Next [0:m -1])
    Next [ 0 ] ← Next [ 1 ] ← 0          // mismatch i rute 0 eller 1 gir ikke overlapp
    i ← 2                                // i er indeksen for mismatch
    j ← 0                                // j indeks teller lengden av overlapp
    while i < m do
        if P [ j ] = P [ i - 1 ] then
            Next [ i ] ← j + 1
            i ← i + 1
            j ← j + 1
        else                                        // ikke likhet
            if j > 0 then
                j ← Next [ j ]                      (Trykkfeil i boka)
            else
                Next [ i ] ← 0
                i ← i + 1
            endif
        endif
    endwhile
end CreateNext
```

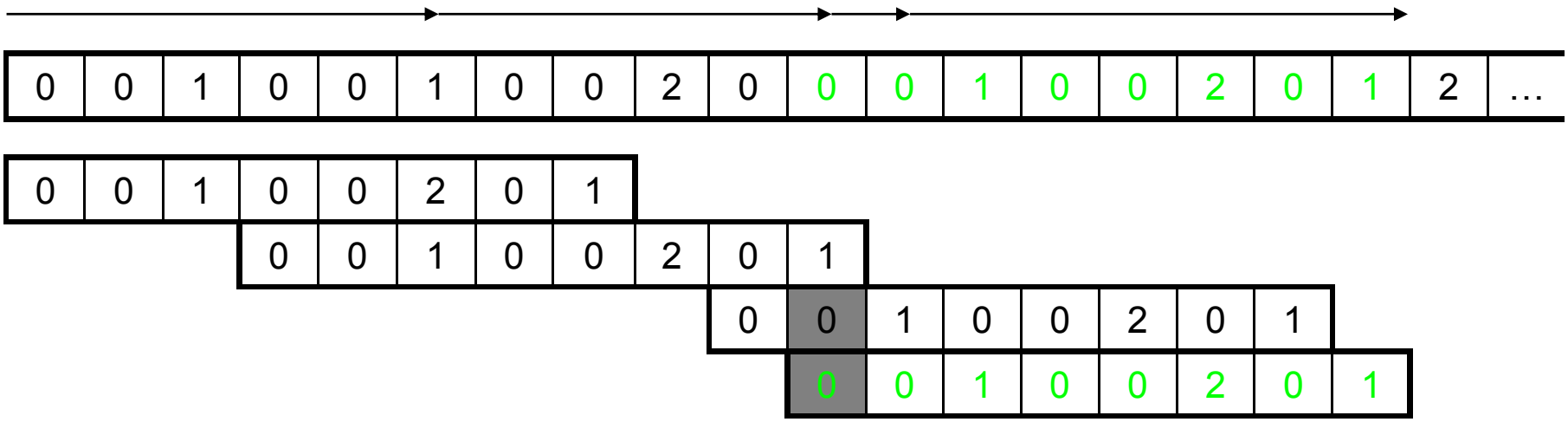
	P							
	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	1	0	0	2	0	1
1	j		i					
2		j		i				
3	j			i				
4	j				i			
5		j				i		
6			j				i	
7		j					i	
8	j						i	
9	j							i

	Next							
	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	1	0	1	2	0	1
1			i					
2				i				
3				i				
4					i			
5						i		
6							i	
7							i	
8							i	
9								i

Knuth-Morris-Pratt-algoritmen



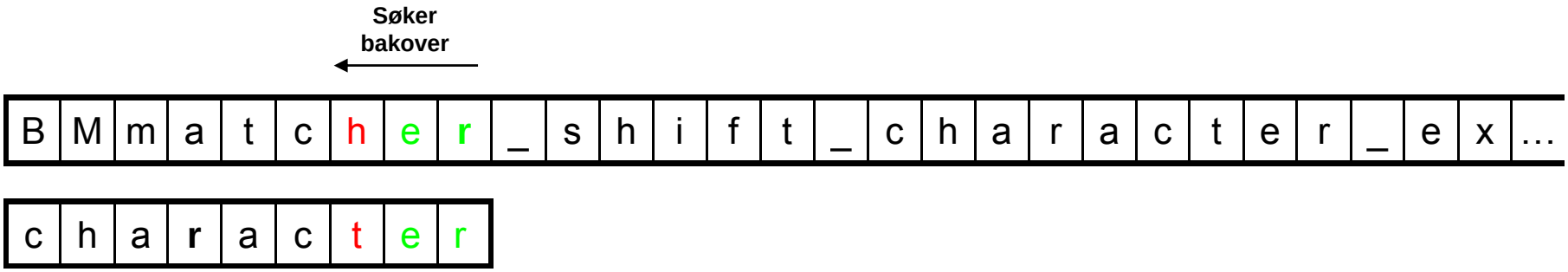
Knuth-Morris-Pratt-algoritmen



Lineær algoritme, $O(n)$ kjøretid worst case.

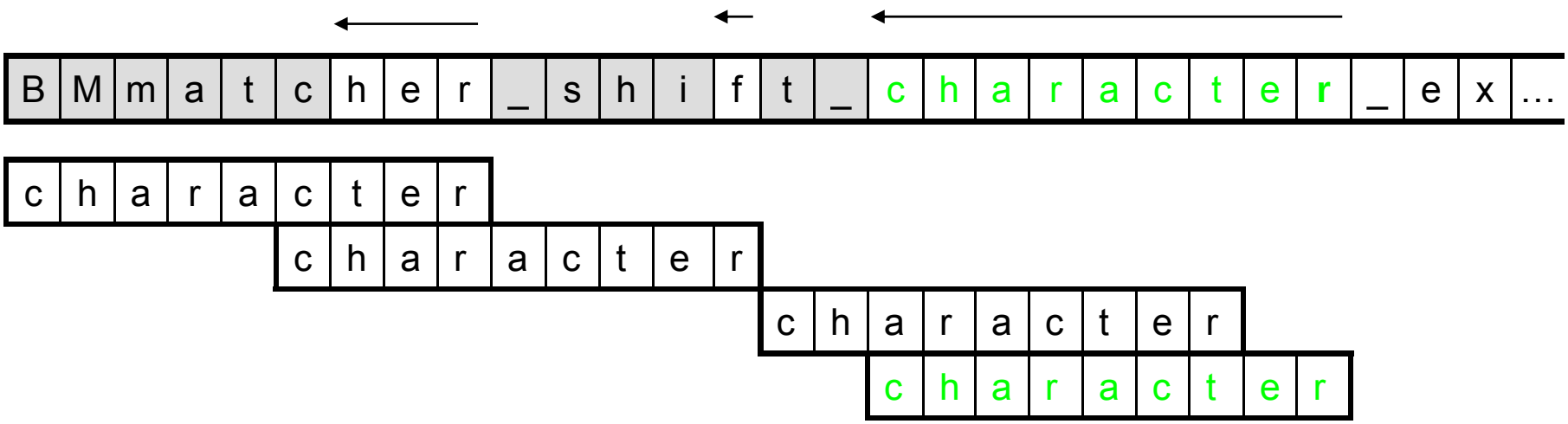
Boyer-Moore-algoritmen (Horspool)

Den naive algoritmen, og Knuth-Morris-Pratt er prefiksbaserte (fra venstre mot høyre).
Boyer-Moore-algoritmen (og varianter) er suffixbasert (fra høyre mot venstre).



Boyer-Moore-algoritmen (Horspool)

Den naive algoritmen, og Knuth-Morris-Pratt er prefiksbaserte (fra venstre mot høyre).
Boyer-Moore-algoritmen (og varianter) er suffixbasert (fra høyre mot venstre).



$O(mn)$ kjøretid worst case (som den naive algoritmen).
Sub-lineær ($\leq n$) i gjennomsnitt $O(n \log_{|A|} m / m)$.

```
function HorspoolStringMatcher (P [0:m -1], T [0:n -1])
    i ← 0
    CreateShift(P [0:m -1], Shift [|A| - 1])
    while i < n – m do
        j ← m – 1
        while j ≥ 0 and T [ i + j ] = P [ j ] do
            j ← j -1
        endwhile
        if j = 0 then
            return( i )
        endif
        i ← i + Shift[ T[ i + m -1] ]
    endwhile
    return(-1)
end HorspoolStringMatcher
```

Karp-Rabin-algoritmen

- Vi antar at strengene våre kommer fra et *k*-ært alfabet $A = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.
- Hvert symbol i *A* kan sees på som et siffer i *k*-tallssystemet.
- Hver streng *S* i *A** kan sees på som tall *S´* i *k*-tallssystemet.

Eks:

k = 10, og A = {0,1, 2, …, 9} (Det vanlige 10-tallssystemet)

Strengen ”6832355” kan sees på som tallet 6 832 355.

- Gitt en streng *P* [0:*m* -1], kan vi beregne det korresponderende tallet *P´* med *m* multiplikasjoner og *m* addisjoner (Horners regel):

$$P' = P[m-1] + k(P[m-2] + \ldots + k(P[1] + kP[0])\ldots))$$

Eks:

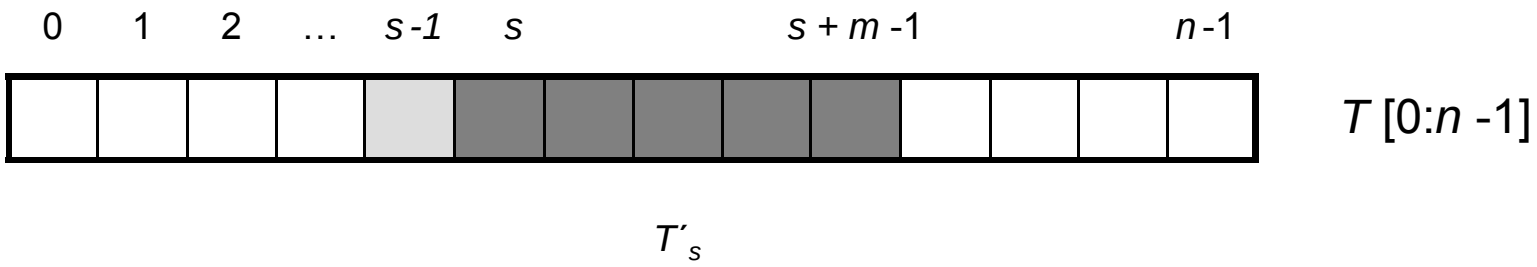
$1234 = 4 + 10(3 + 10(2 + 10*1))$

Karp-Rabin-algoritmen

- Gitt en tekststreng T [0:n -1], og et heltall s (start-index), bruker vi T_s som betegnelse på delstrengen T [s: s + m -1]. (Vi antar at patternet vårt har lengde m.)

- En algoritme basert på Horners regel beregner T'_0, T'_1, T'_2, … og sammenlikner disse tallene med tallet P' for patternet P.
  (Tilsvarende den naive algoritmen.)

- Gitt T'_{s-1} og k^{m-1}, kan vi regne ut T'_s i konstant tid. !



Karp-Rabin-algoritmen

Grunnen til at vi kan beregne T'_s i konstant tid når vi har T'_{s-1} og k^{m-1}, er følgende rekurrensrelasjon:

$$T'_s = k(T'_{s-1} - k^{m-1} * T[s]) + T[s+m] \qquad s = 1, \ldots, n-m$$

Konstant, beregnes *en* gang, kan gjøres i tid $O(\log m)$

Eks:

$k = 10$, $A = \{0,1, 2, \ldots, 9\}$ (Det vanlige 10-tallssystemet) og $m = 7$.

$T'_{s-1} = 7937245$

$T'_s = 9372458$

$$T'_s = 10(7937245 - (1000000 * 7)) + 8$$

Kan gjøres i konstant tid. Bare multiplikasjon og addisjon, vi antar disse operasjonene kan gjøres i konstant tid.

Karp-Rabin-algoritmen

- Kan beregne T'_s i konstant tid når vi har T'_{s-1} og k^{m-1}.
- Altså kan vi beregne de $n - m + 1$ tallene T'_s, $s = 0, 1, \ldots, n - m$ og P' i tid $O(n)$.
- Vi kan altså, i teorien, implementere en søkealgoritme med kjøretid $O(n)$.
- Dessverre vil tallene T'_s og P' i praksis være for store til at algoritmen blir praktisk anvendbar.
- Trikset er å bruke modulo-aritmetikk. Vi gjør alle beregninger modulo q (q et tilfeldig valgt primtall, slik at kq akkurat passer i et 32/64 bits register).

Karp-Rabin-algoritmen

- Vi beregner $T'^{(q)}_s$ og $P'^{(q)}$, hvor

$$T'^{(q)}_s = T'_s \bmod q,$$
$$P'^{(q)} = P' \bmod q,$$

} Resten i divisjonen, når vi deler på q: et tall i intervallet {0, 1, …, q -1}.

og sammenlikner.

- Vi kan ha $T'^{(q)}_s = P'^{(q)}$, selv om $T'_s \neq P'$, en såkalt *spuriøs match*.
- Har vi $T'^{(q)}_s = P'^{(q)}$, må vi altså gjøre en nøyaktig sjekk av T_s og P.
- Med stor nok q, er sannsynligheten for spuriøse matcher lav.

```
function KarpRabinStringMatcher (P [0:m -1], T [0:n -1], k, q)
    c ← k^(m -1) mod q
    P'(q) ← 0
    T'(q)_s ← 0

    for i ← 1 to m do
        P'(q) ← (k * P'(q) + P [ i ]) mod q
        T'(q)_0 ← (k * T'(q)_0 + T [ i ]) mod q
    endfor

    for s ← 0 to n - m do
        if s > 0 then
            T'(q)_s ← (k * ( T'(q)_s -1 - T [ s ] * c) + T [ s + m ]) mod q
        endif
        if T'(q)_s = P'(q) then
            if T_s = P then
                return(s)
            endif
        endif
    endfor
    return(-1)
    end KarpRabinStringMatcher
```

Karp-Rabin-algoritmen

- Lengste kjøretid for Karp-Rabin-algoritmen får vi når patternet *P* finnes helt i slutten av strengen *T.*

- Sannsynligheten for at $T'^{(q)}_s$ antar en spesifikk verdi i intervallet {0, 1, …, q-1} er uniform 1/q. (Vi antar strengene er uniformt fordelte.)

- $T'^{(q)}_s$, s = 0, 1, …, n-m-1 vil altså gi opphav til en spuriøs match med sannsynlighet 1/q.

- La r være det forventede antall spuriøse matcher. Hver av disse innebærer inntil m sammenlikninger. I tillegg må vi sjekke $T'^{(q)}_{n-m}$, hvor vi til slutt får ekte match.

- Kjøretiden blir altså: $(r + 1)m + (n - m + 1)$

Karp-Rabin-algoritmen

- *r* er en binomialfordelt stokastisk variabel. (Hver skift er et «forsøk», med suksessansynlighet 1/*q*, og vi gjør *n-m* forsøk) [Nå anser vi spuriøse matcher som «suksess»…]

- E[*r*] = (*n-m*)/*q.* (Forventning av binomialfordelt variabel.)

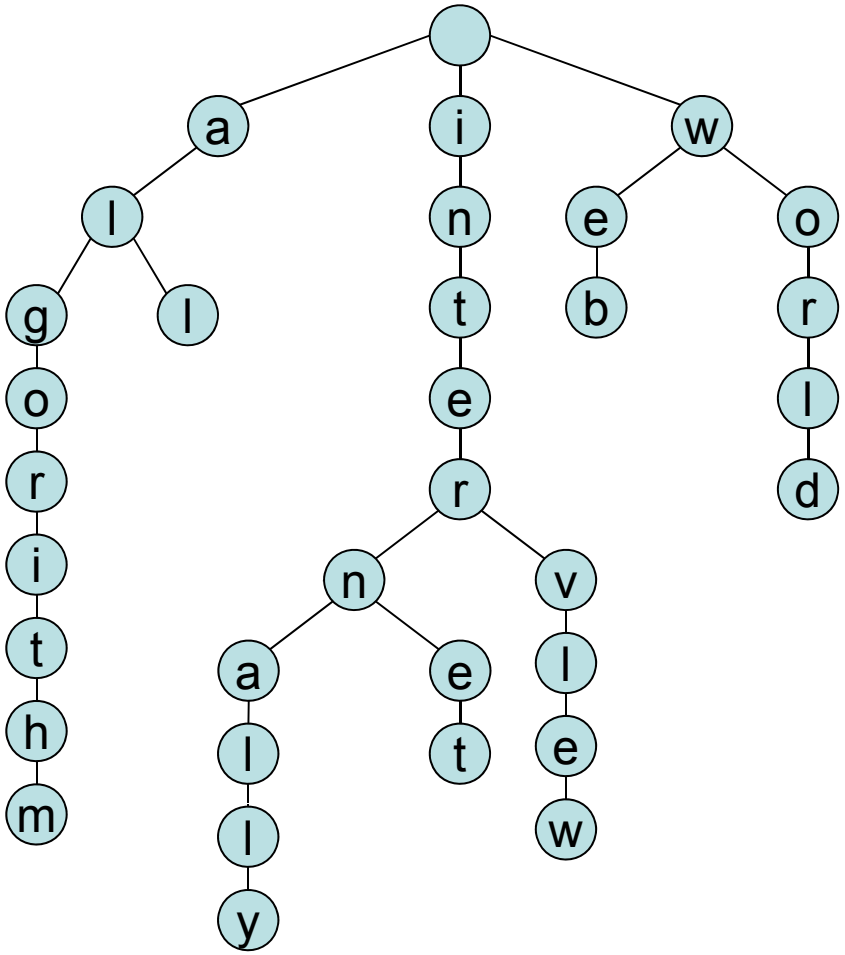
- Totalt får vi altså $\left(\frac{n-m}{q}+1\right)m+(n-m+1)$

Forventet kjøretid når matchen finnes helt til slutt i *T.*

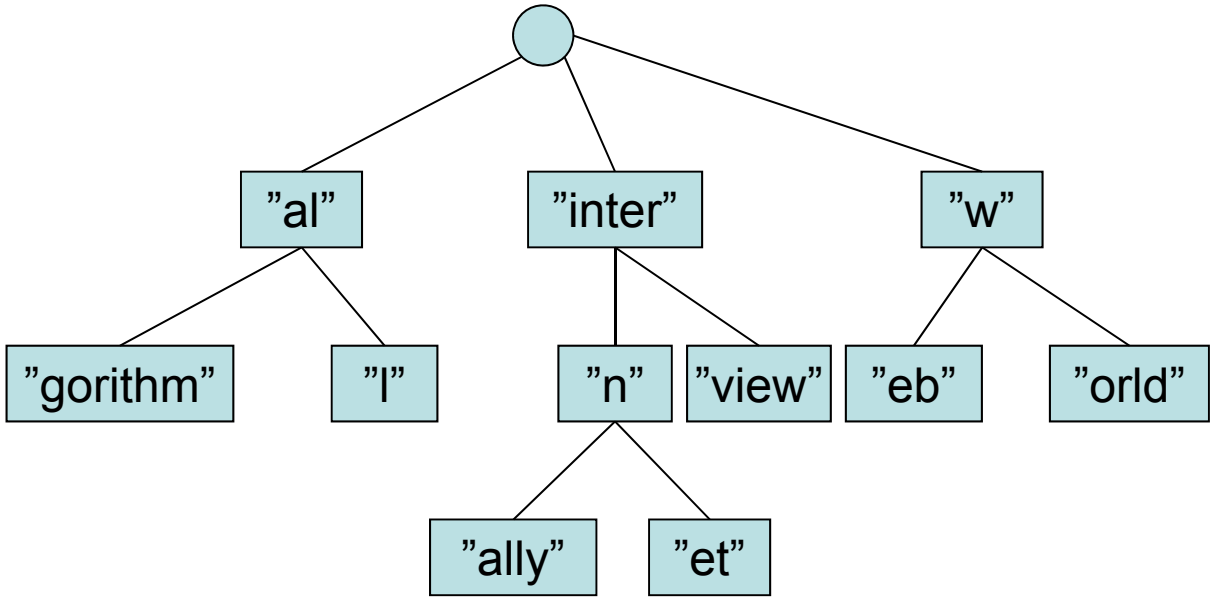
- Hvis $q < C$, hvor C er en konstant, blir kjøretiden $O(nm)$.
- MEN det er rimelig å anta $q >> m$, *da blir kjøretiden* $O(n)$.

Trie-trær

Trykkfeil i boka

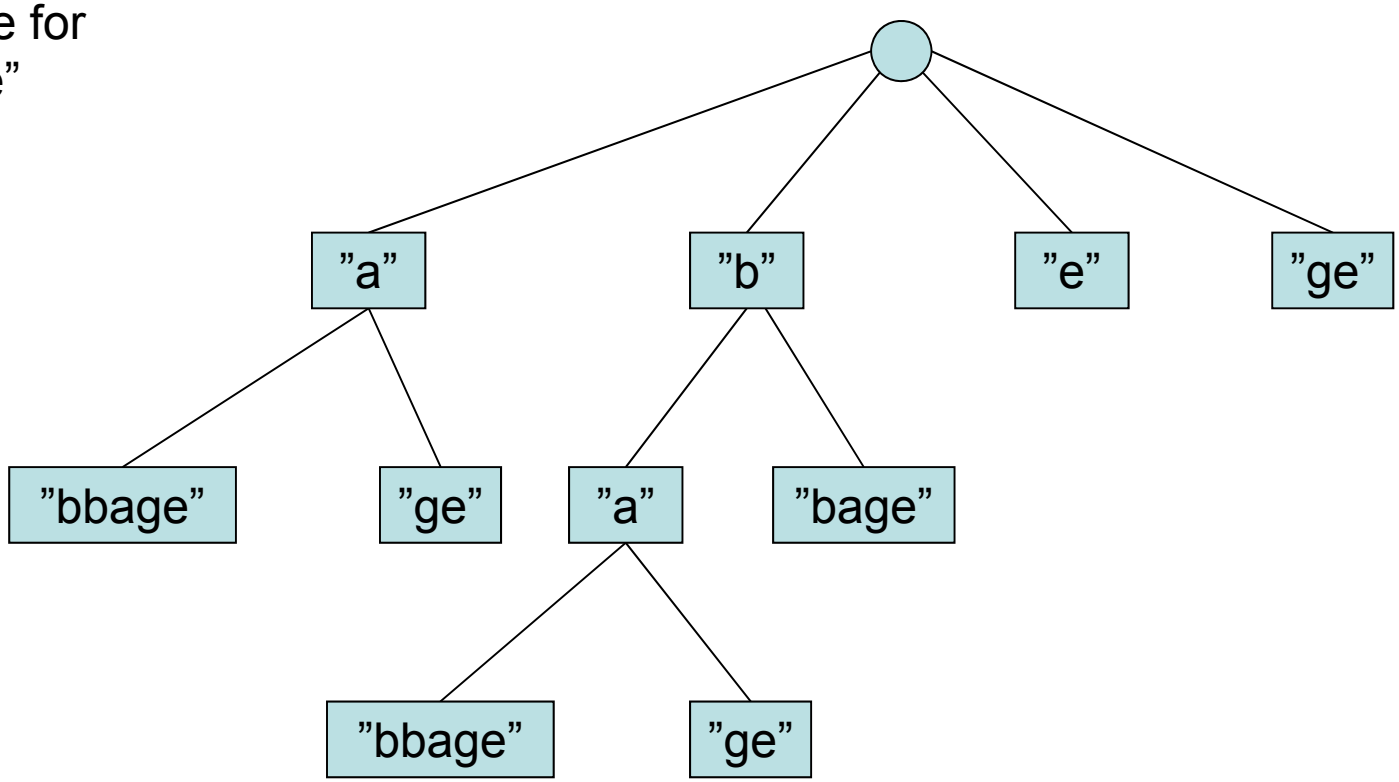


Trie-trær

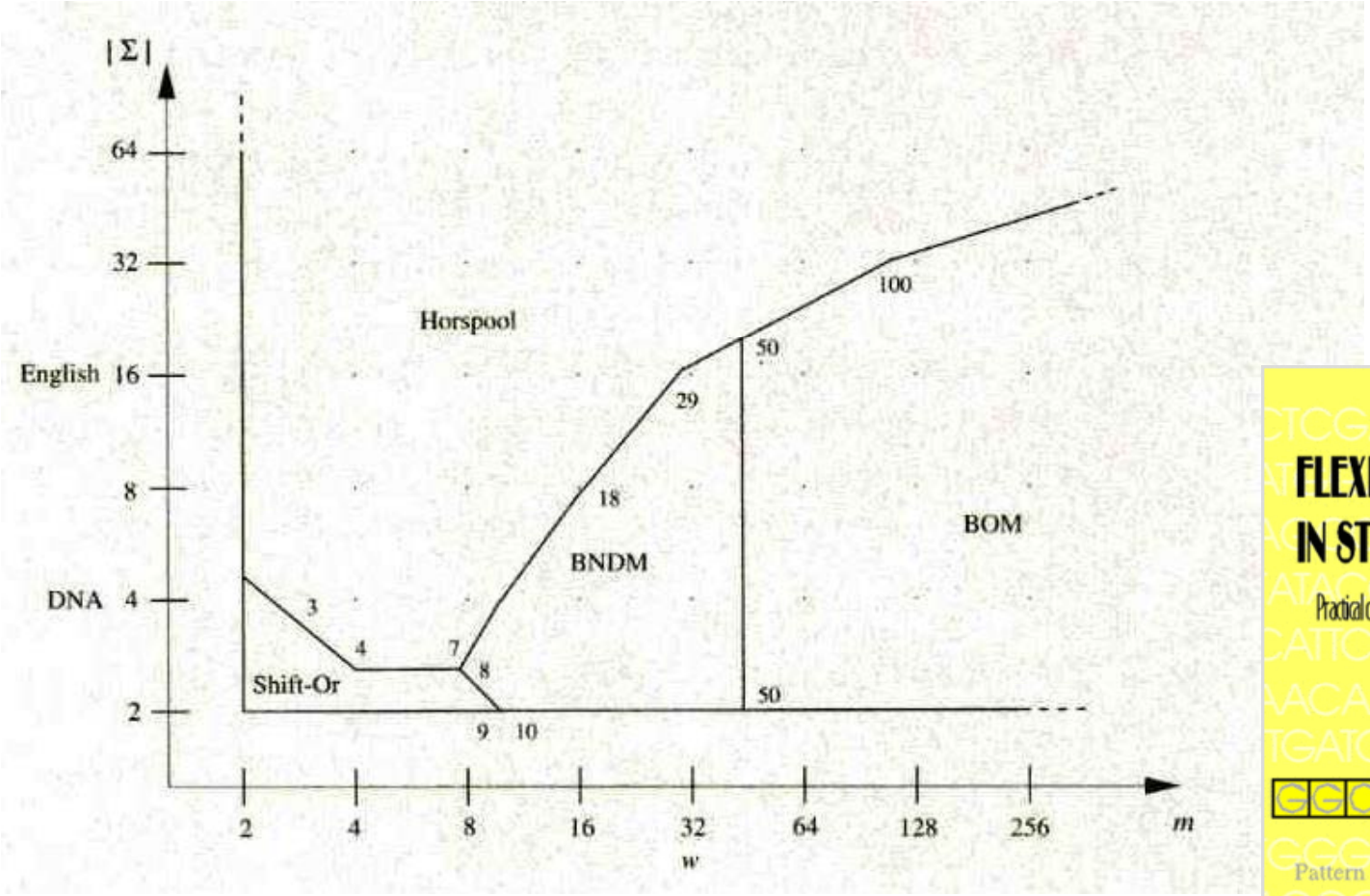


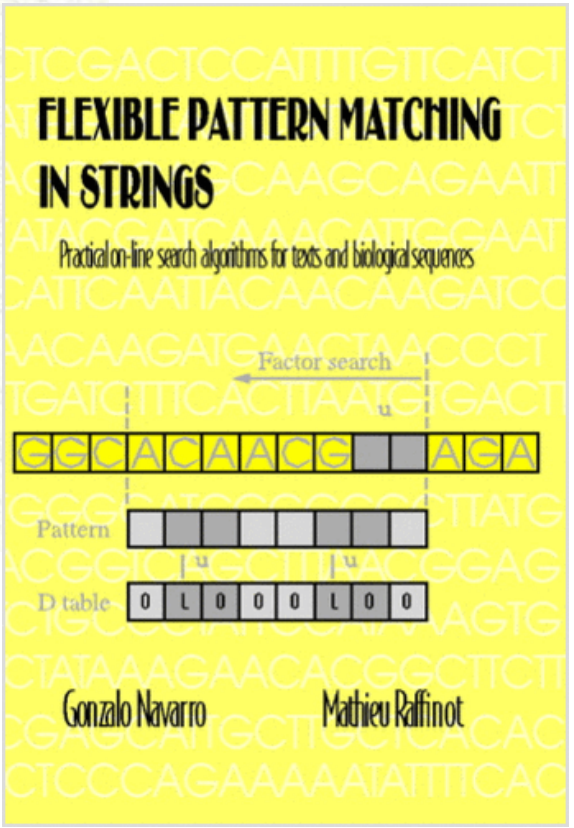
Suffix-trær

Suffix –tre for
”babbage”



Div.


|Σ|
64
32
English 16
8
DNA 4
2
Horspool
Shift-Or
BNDM
BOM
3
4
7
8
9
10
18
29
50
50
100
2
4
8
16
32
64
128
256
m
w


FLEXIBLE PATTERN MATCHING IN STRINGS
Practical on-line search algorithms for texts and biological sequences
Factor search
u
GGCACAACG AGA
Pattern
u
u
D table
0 1 0 0 0 1 0 0
Gonzalo Navarro
Mathieu Raffinot