Prioritetskøer

- Binære heaper
- Venstrevridde heaper (Leftist)
- Binomialheaper
- Fibonacciheaper

Prioritetskøer er viktige i bla. operativsystemer (prosesstyring i multitaskingssystemer), og søkealgoritmer (A, A*, D*, etc.), og i simulering.

Prioritetskøer

Prioritetskøer er datastukturer som holder elementer med en prioritet (key) i en kø-aktig struktur, og som implementerer følgende operasjoner:

- **`insert()`** – Legge et element inn i køen
- **`deleteMin()`** – Ta ut elementet med høyest prioritet

Og kanskje også:

- **`buildHeap()`** – Lage en kø av en mengde elementer
- **`increaseKey()/DecreaseKey()`** – Endre prioritet
- **`delete()`** – Slette et element
- **`merge()`** – Slå sammen to prioritetskøer

Prioritetskøer

En usortert lenket liste kan brukes. **`insert()`** legger inn først i listen ($O(1)$) og **`deleteMin()`** søker igjennom listen etter elementet med høyest prioritet ($O(n)$).

En sortert liste kan brukes. (Omvendt kjøretid.)

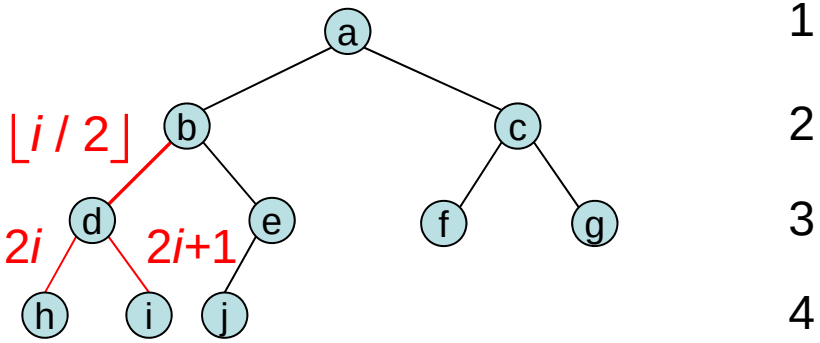
– Ikke så veldig effektivt.

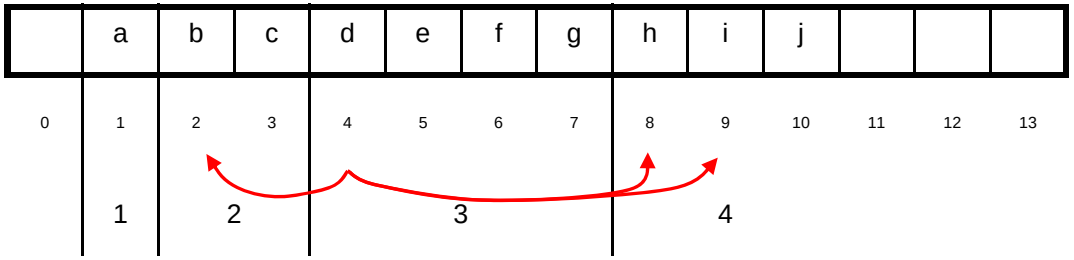
For å lage en effektiv prioritetskø, holder det at elementene i køen er ”nogenlunde sorterte”.

Binære heaper (vanligst)

En *binærheap* er organisert som et komplett binærtre. (Alle nivåer fulle, med evt. unntak av det siste nivået)

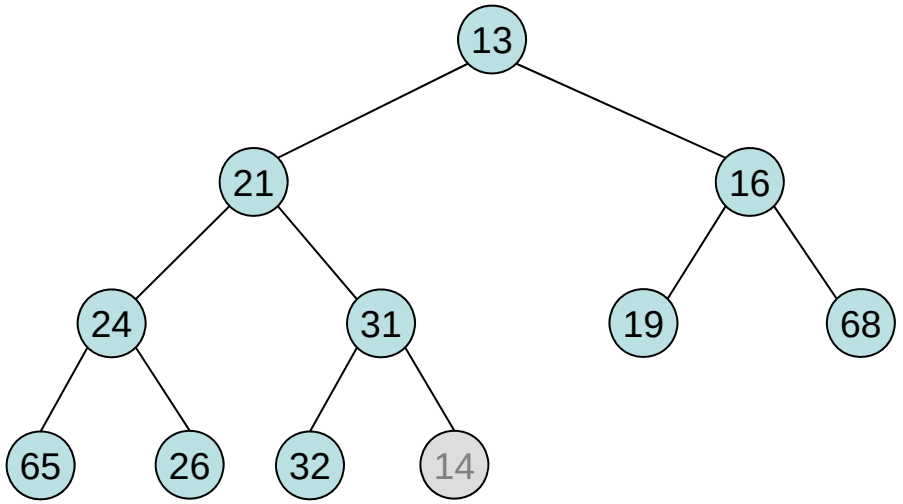
I en *binærheap* skal elementet i roten ha en key som er mindre eller lik key'en til barna, i tillegg skal hvert deltre være en binærheap.





Binære heaper (vanligst)

`insert(14)`



1

2

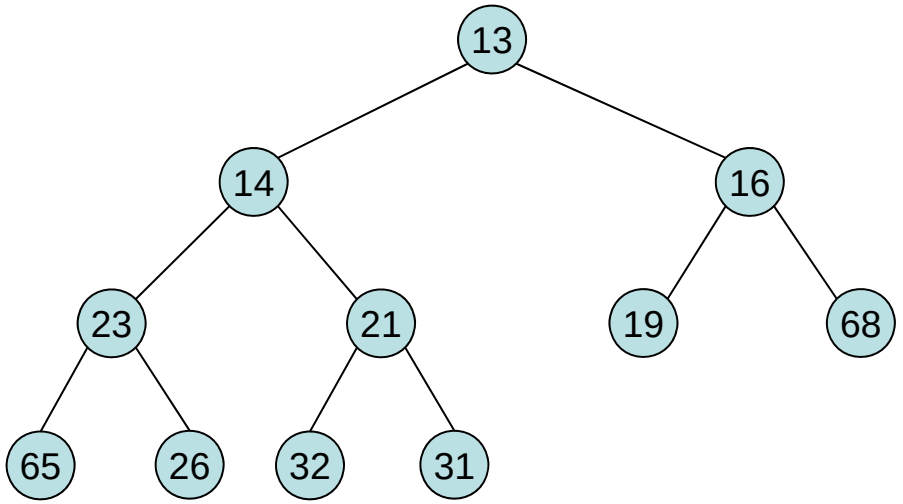
3

4

	13	21	16	24	31	19	68	65	26	32	14		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	1	2		3				4					

Binære heaper (vanligst)

`insert(14)`



1

2

3

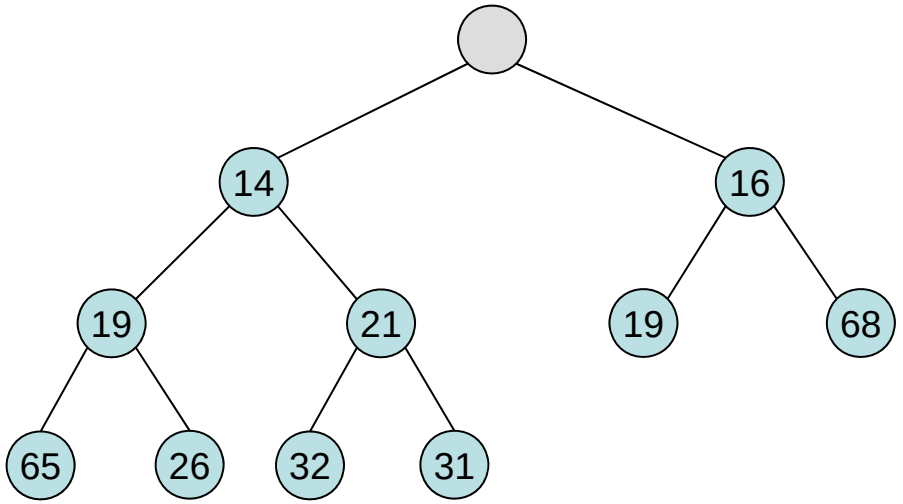
4

	13	14	16	24	21	19	68	65	26	32	31		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	1		2			3			4				

”**`percolateUp()`**”

Binære heaper (vanligst)

`deleteMin()`



1

2

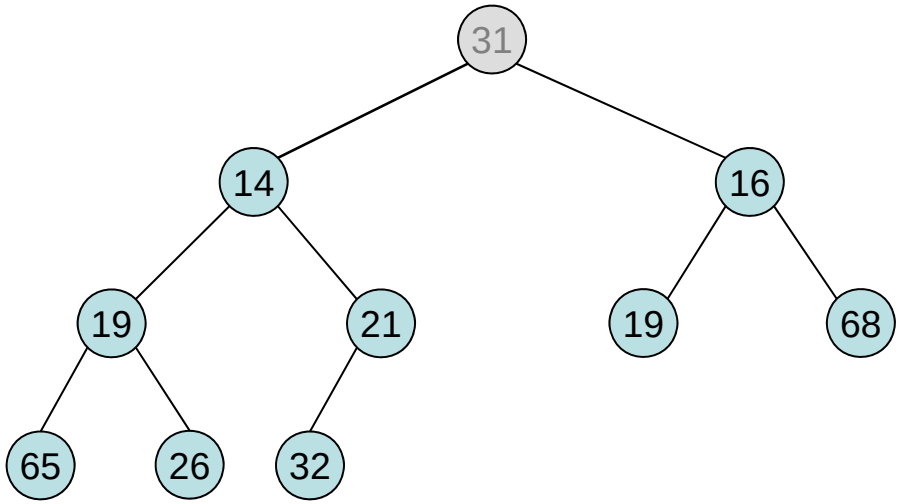
3

4

		14	16	19	21	19	68	65	26	32	31		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	1	2		3				4					

Binære heaper (vanligst)

`deleteMin()`



1

2

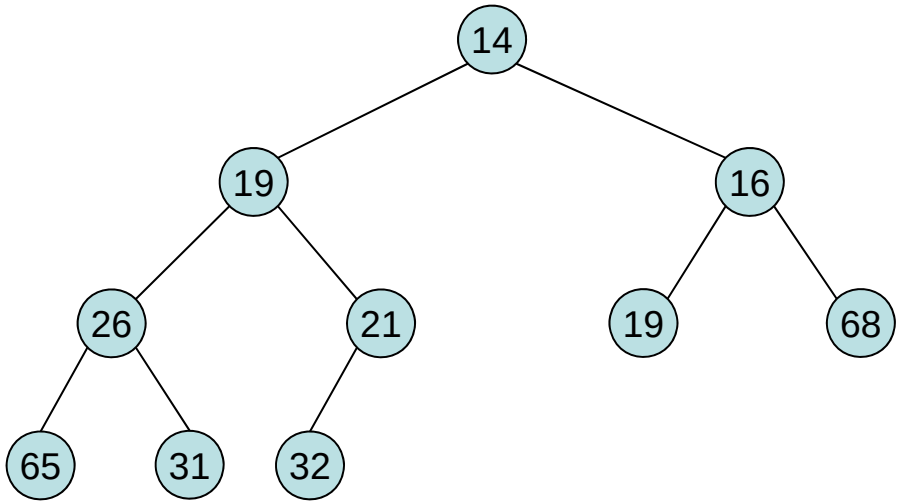
3

4

	31	14	16	19	21	19	68	65	26	32			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	1	2		3				4					

Binære heaper (vanligst)

`deleteMin()`



1
2
3
4

	14	19	16	19	21	26	68	65	31	32			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

1 2 3 4

”**`percolateDown()`**”

Binære heaper (vanligst)

	worst case	gjennomsnitt
`insert()`	$O(\log N)$	$O(1)$
`deleteMin()`	$O(\log N)$	$O(\log N)$
`buildHeap()`	$O(N)$	

(Legg elementene inn i tabellen i vilkårlig rekkefølge, og kjør **`percolateDown()`** på hver rot i deltrærne i heapen (treet) som oppstår, nedenifra og opp.)

(Summen av høydene i et binærtre med N noder er $O(N)$.)

`merge()`	$O(N)$

(N = antall elementer)

Venstrevridde heaper

For å implementere **`merge()`** effektivt, går vi bort fra tabell-metoden, og implementerer såkalte *venstrevridde heaper* (*leftist heaps*), som rene trær.

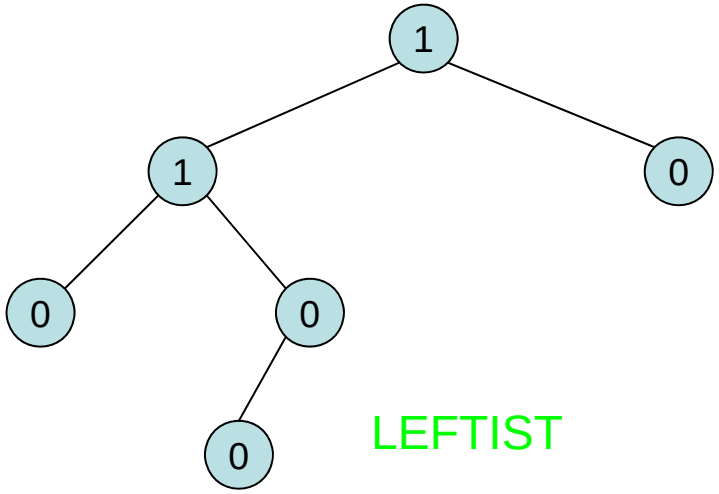
Tanken er å gjøre heapen (treet) skeivt, slik at vi kan gjøre det meste av arbeidet på den laveste delen av treet.

En *venstrevridd heap* er et binærtre med heap-struktur (røttene i deltrærne skal ha lavere key enn barna.) og et ekstra *skeivhetskrav.*

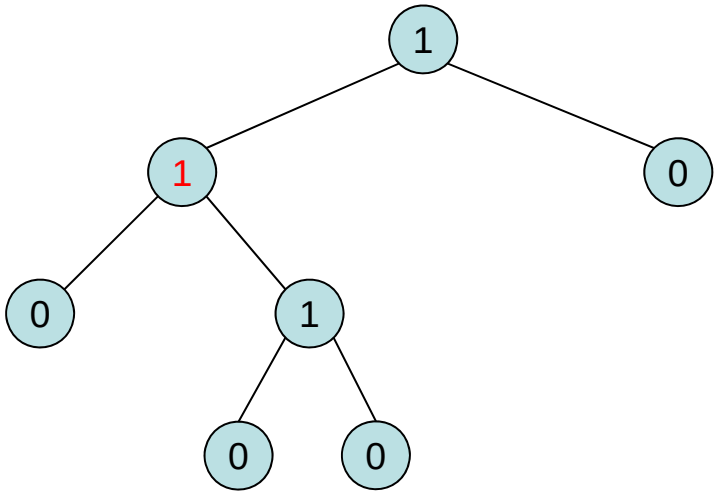
For alle noder *X* i treet, definerer vi *nullsti-lengde*(*X*) (*null path length*) som lengden av korteste sti fra *X* til en node som ikke har to barn.

Kravet er at for alle noder, skal nullsti-lengden til det venstre barnet være minst like lang som nullsti-lengden til det høyre barnet.

Venstrevridde heaper



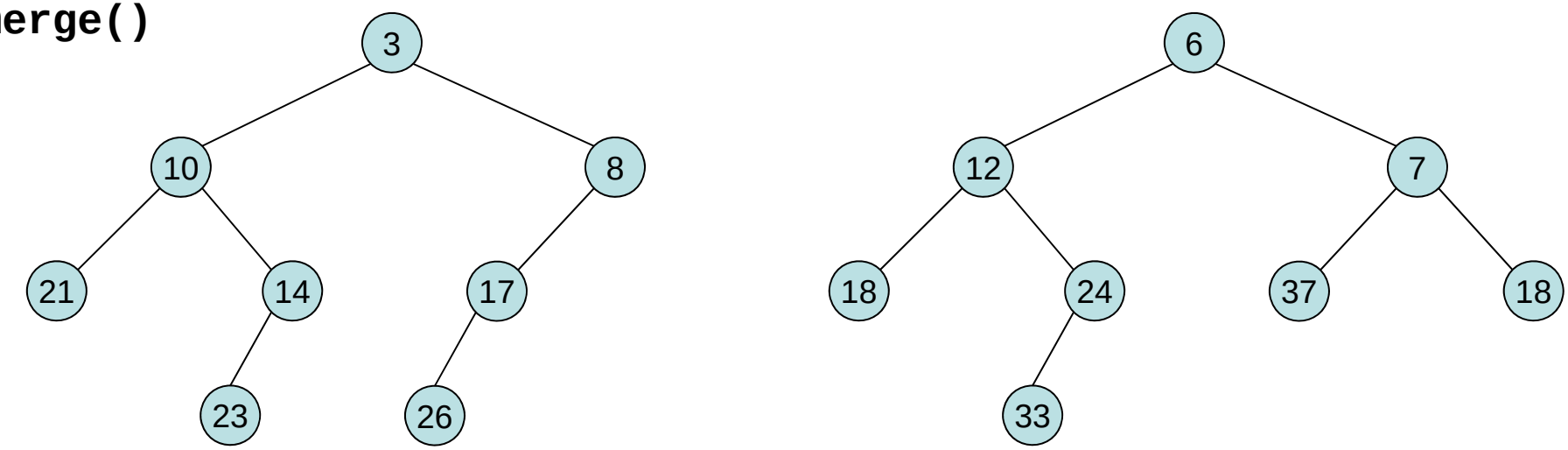
LEFTIST



IKKE LEFTIST

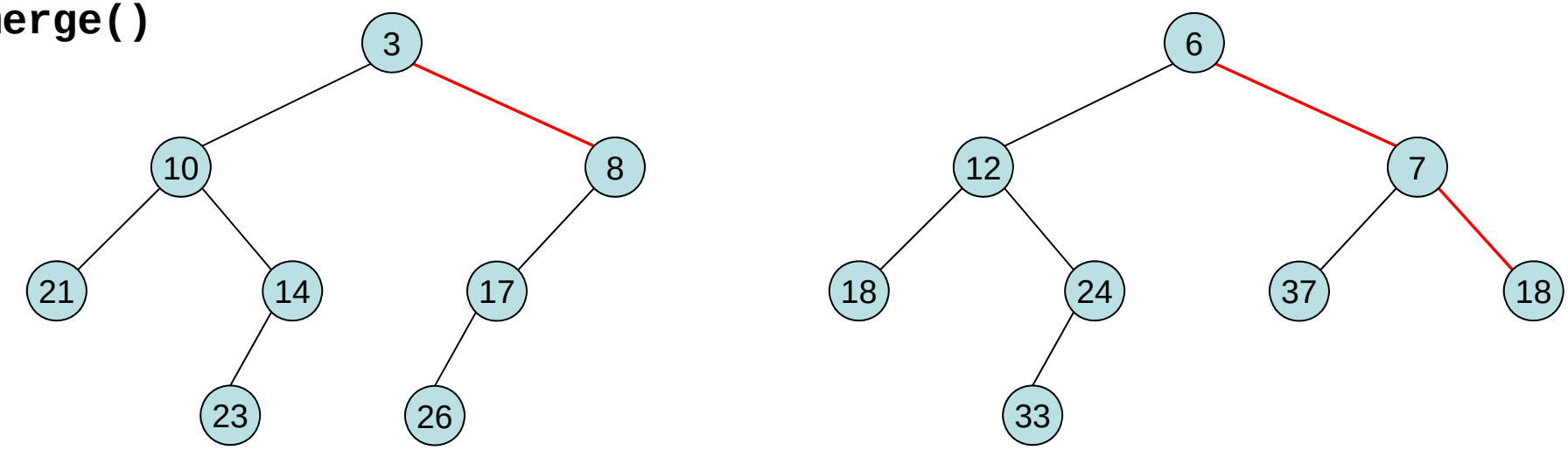
Venstrevridde heaper

`merge()`



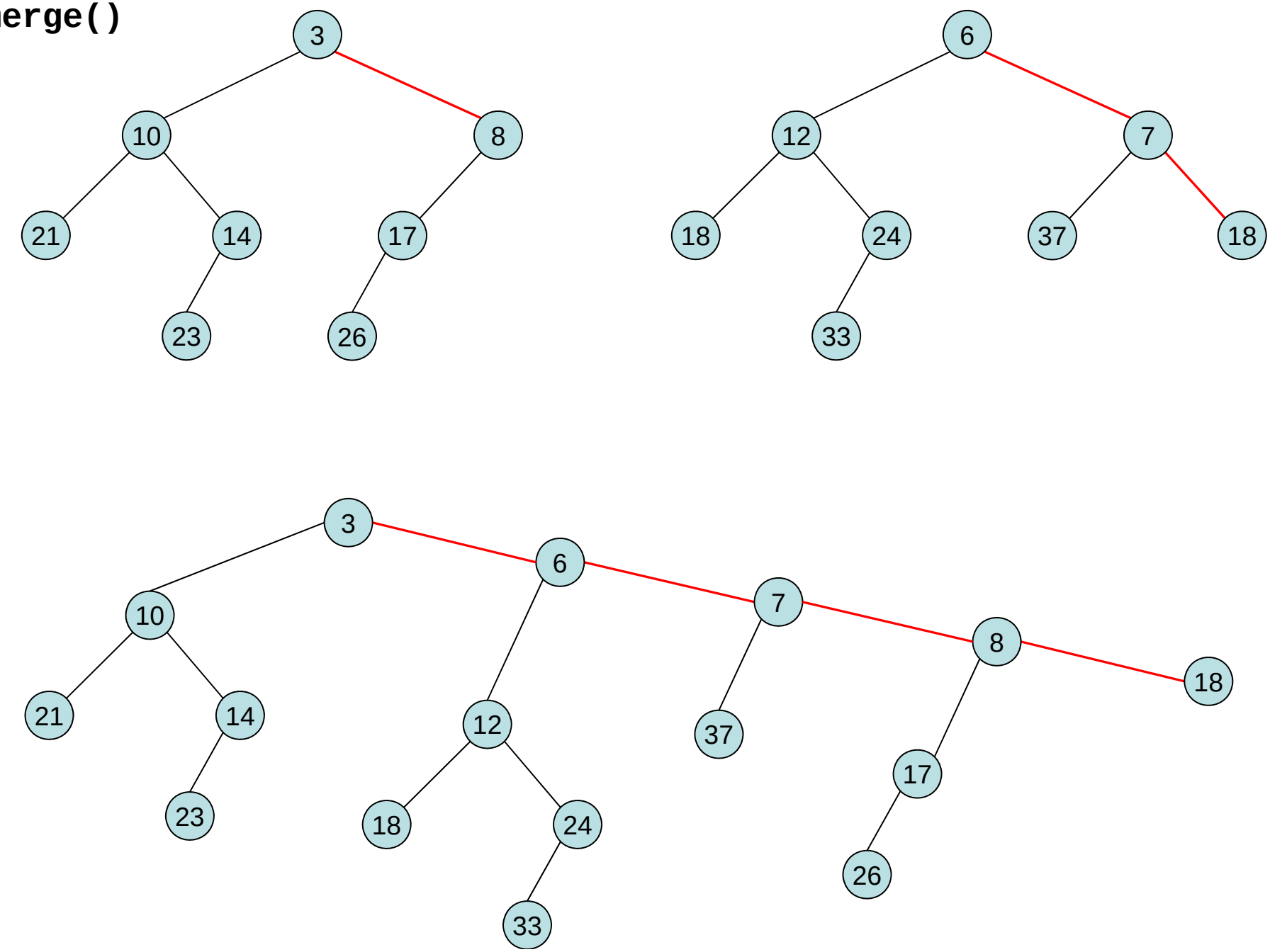
Venstrevridde heaper

`merge()`



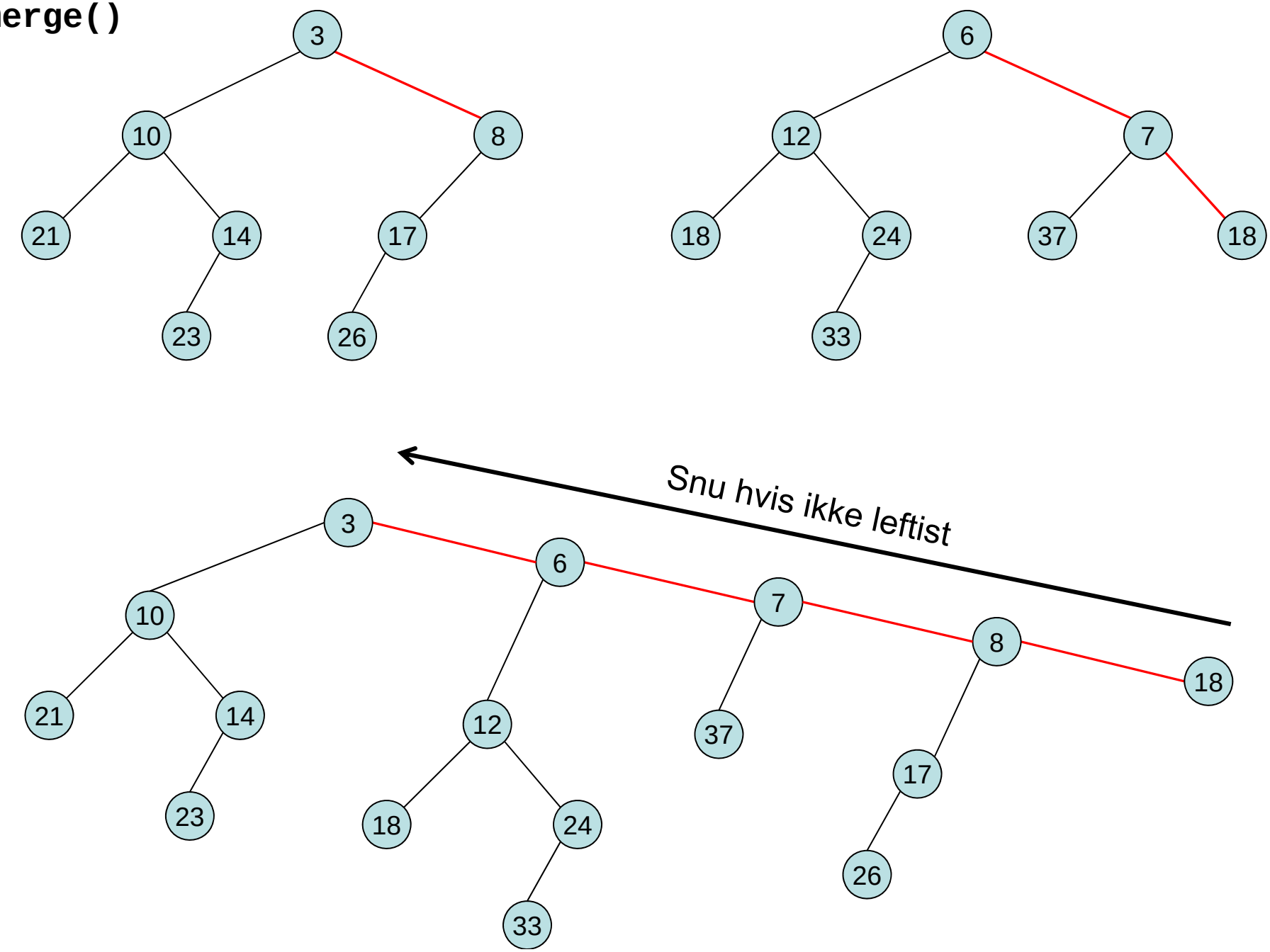
Venstrevridde heaper

`merge()`



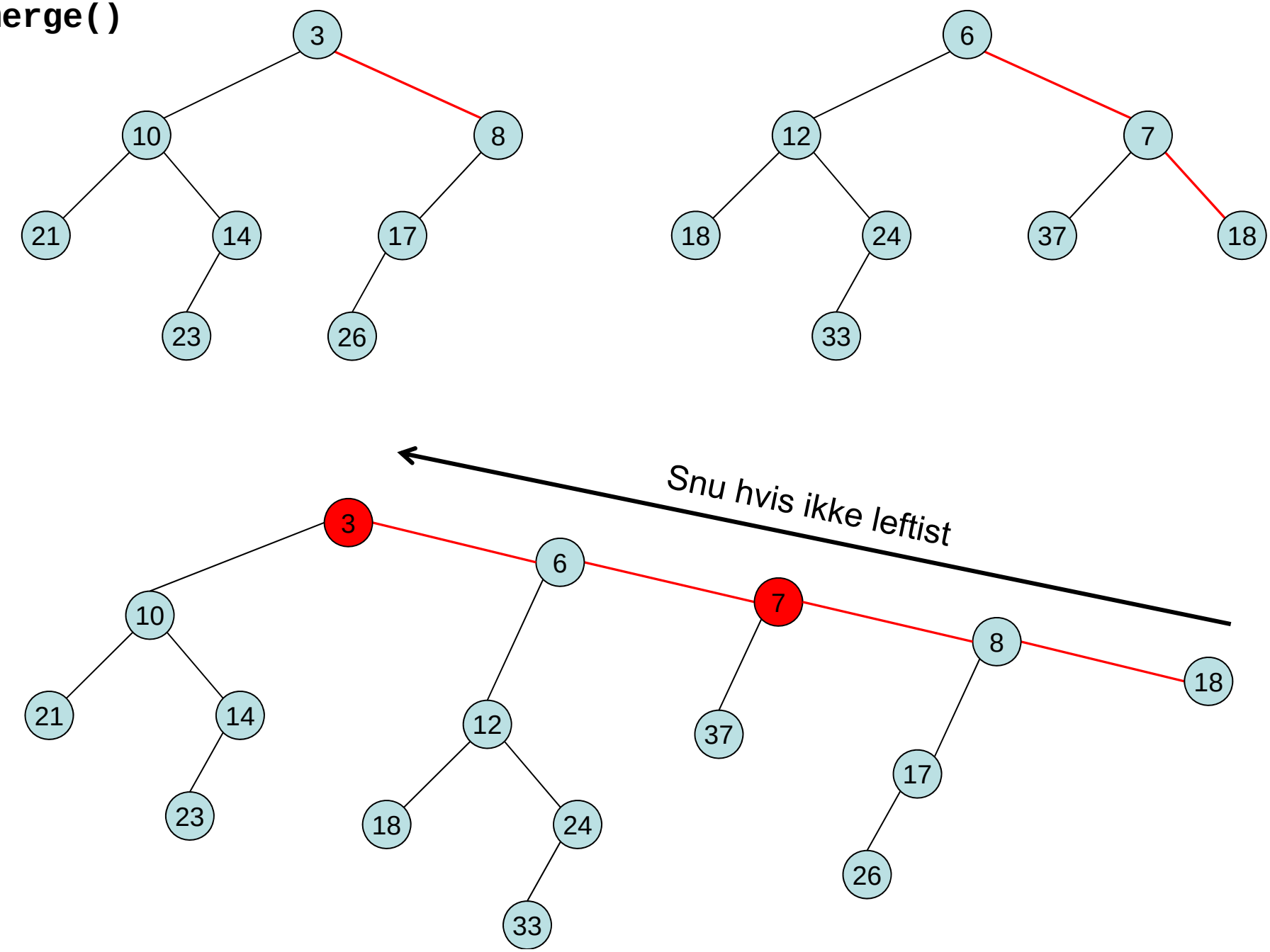
Venstrevridde heaper

`merge()`



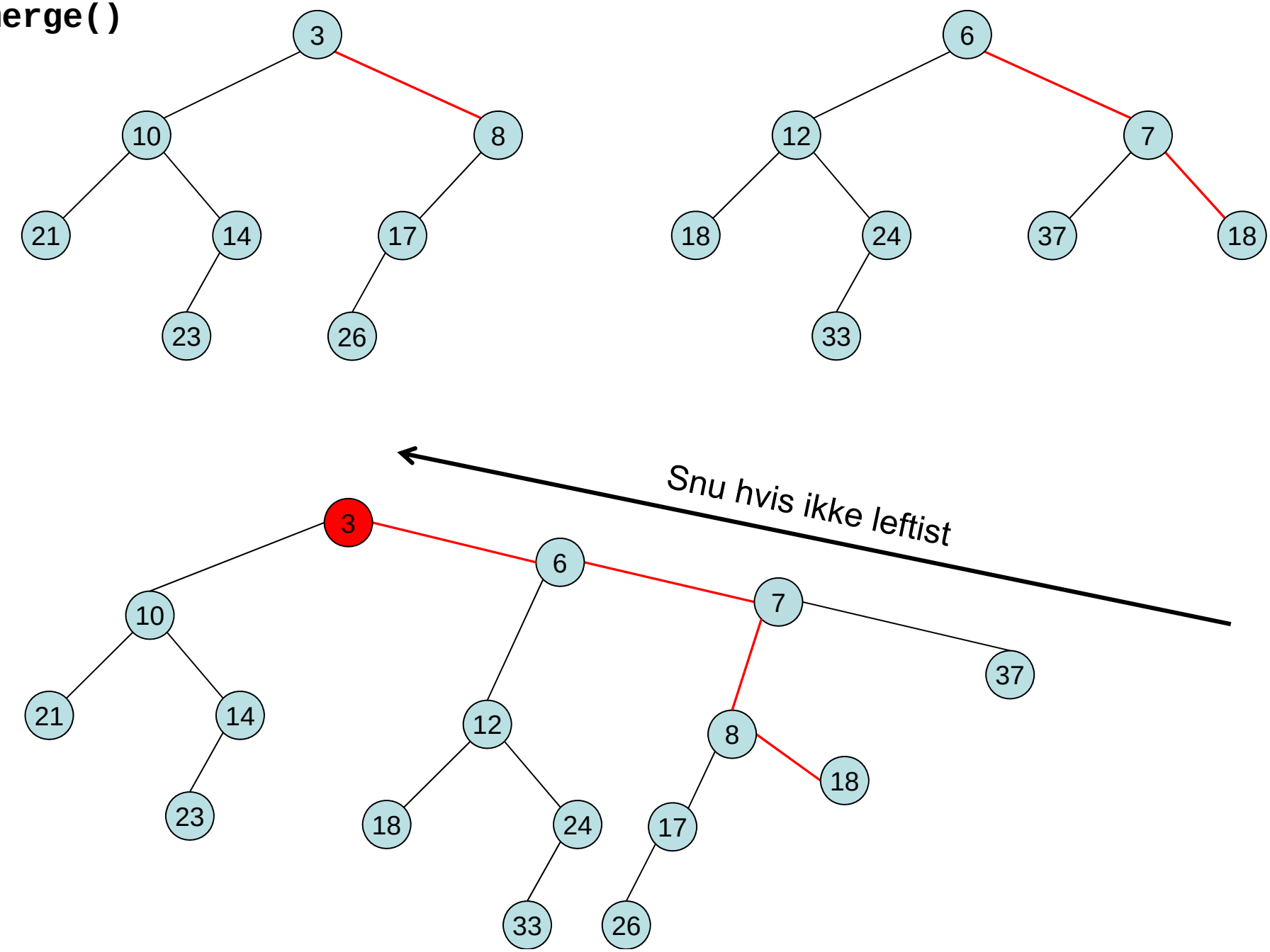
Venstrevridde heaper

`merge()`



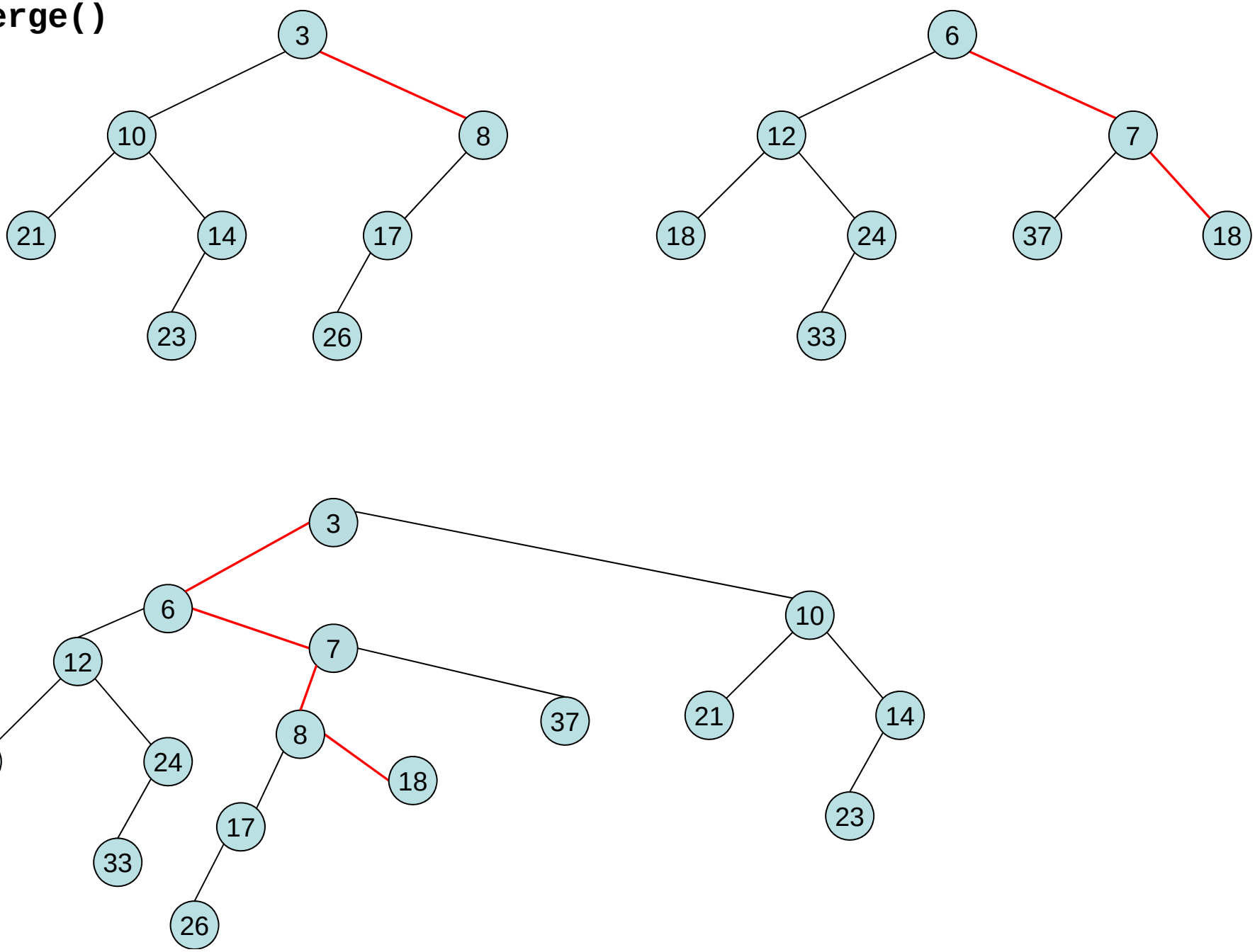
Venstrevridde heaper

`merge()`



Venstrevridde heaper

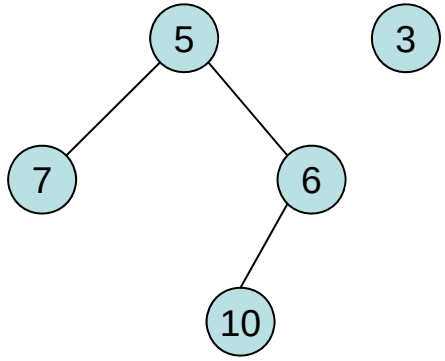
`merge()`



Venstrevridde heaper

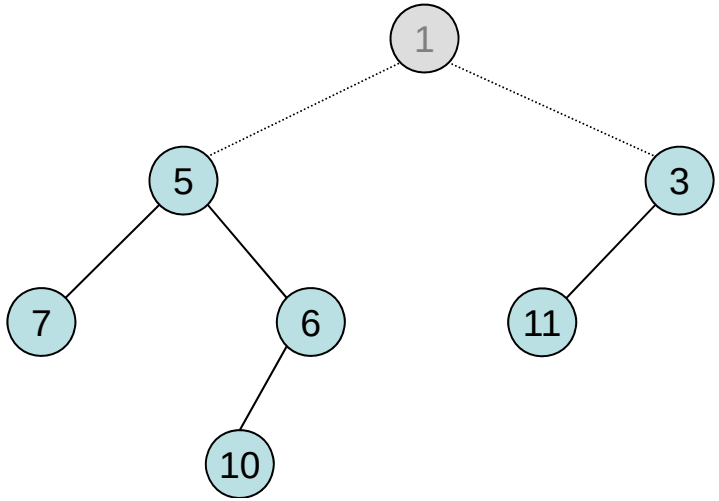
insert(3)

merge()



deleteMin()

merge()



Venstrevridde heaper

	worst case
`merge()`	$O(\log N)$
`insert()`	$O(\log N)$
`deleteMin()`	$O(\log N)$
`buildHeap()`	$O(N)$

(N = antall elementer)

I venstrevridde heaper med N noder, er høyre sti maksimalt $\lfloor \log (N+1) \rfloor$ lang.

Binomialheaper

Venstrevridde / skeive heaper:

`merge()`, **`insert()`** og **`deleteMin()`** i tid $O(\log N)$ w.c.

Binære heaper:

`insert()` i tid $O(1)$ i gjennomsnitt.

Binomialheaper

`merge()`, **`insert()`** og **`deleteMin()`** i tid $O(\log N)$ w.c.

`insert()` i tid $O(1)$ i gjennomsnitt.

Binomialheaper er ikke trær, men en skog av trær, hvert tre en heap.

Binomialheaper

Binomialtrær

B_0

Binomialheaper

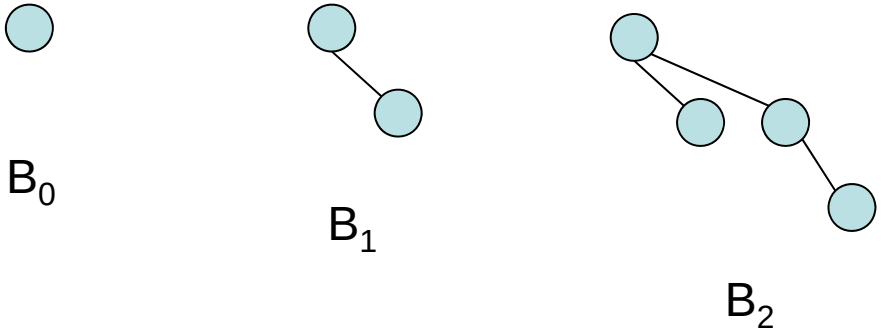
Binomialtrær

B_0

B_1

Binomialheaper

Binomialtrær



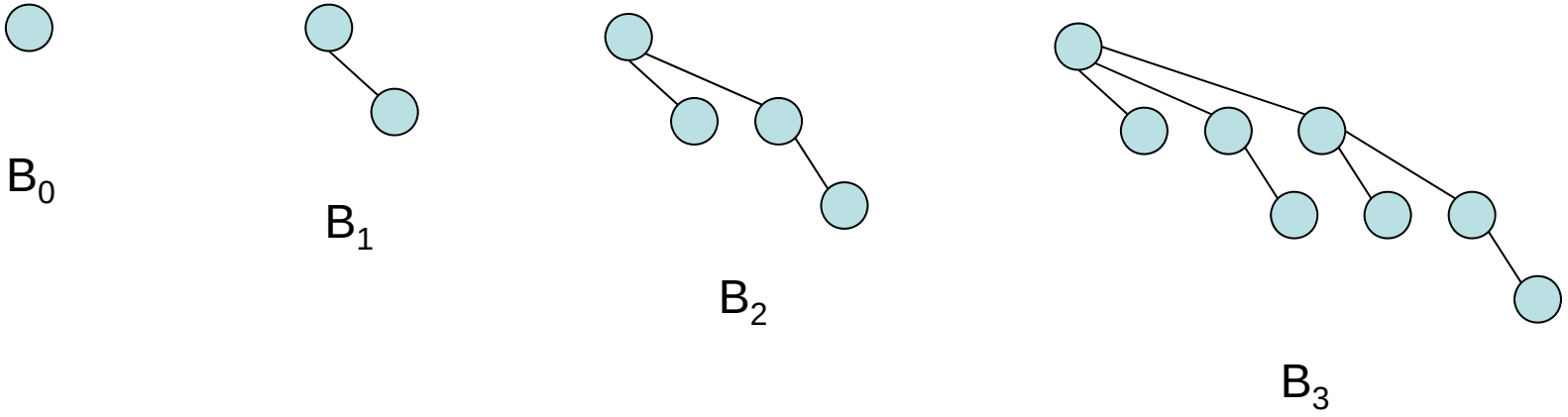
B_0

B_1

B_2

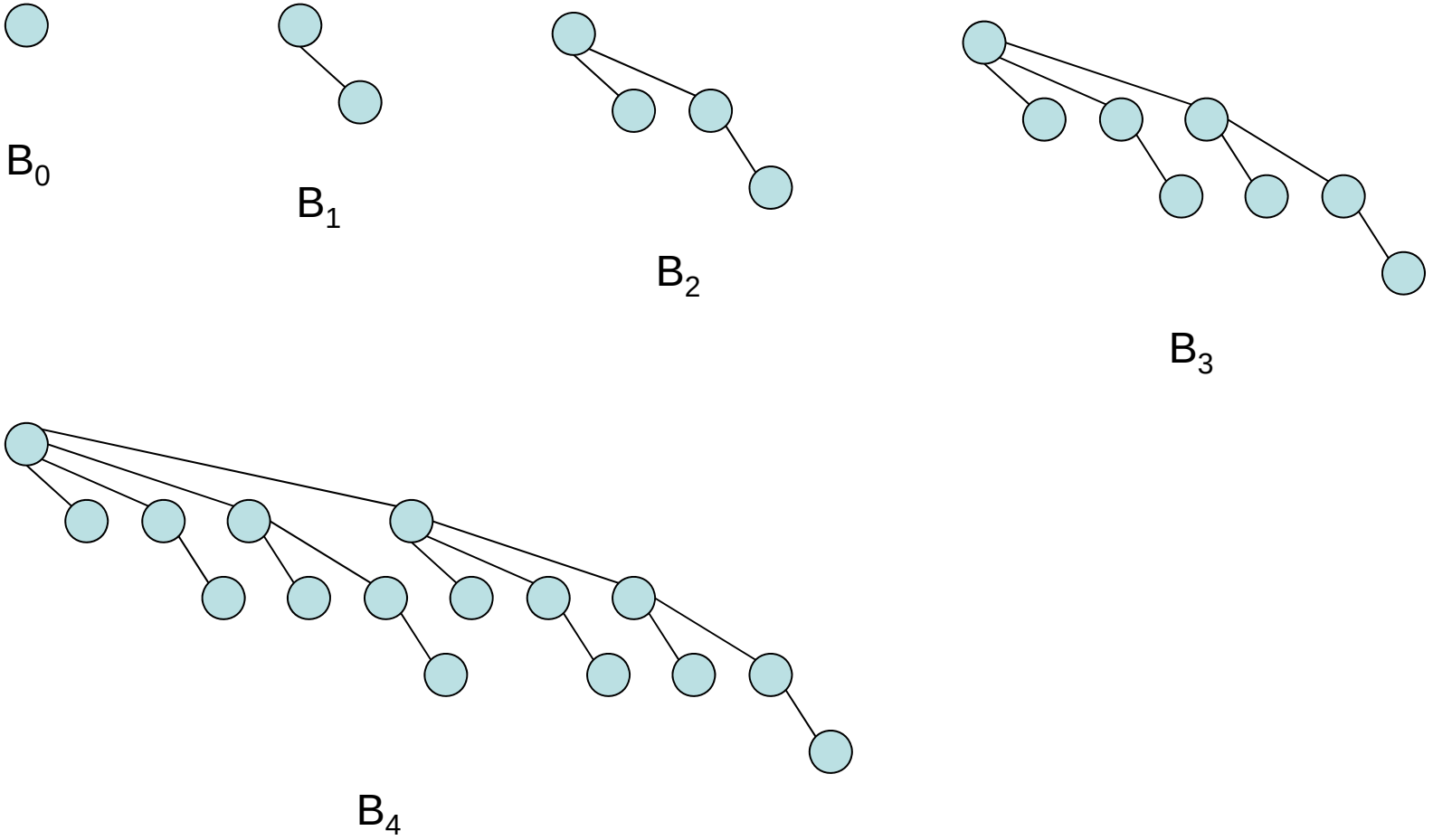
Binomialheaper

Binomialtrær



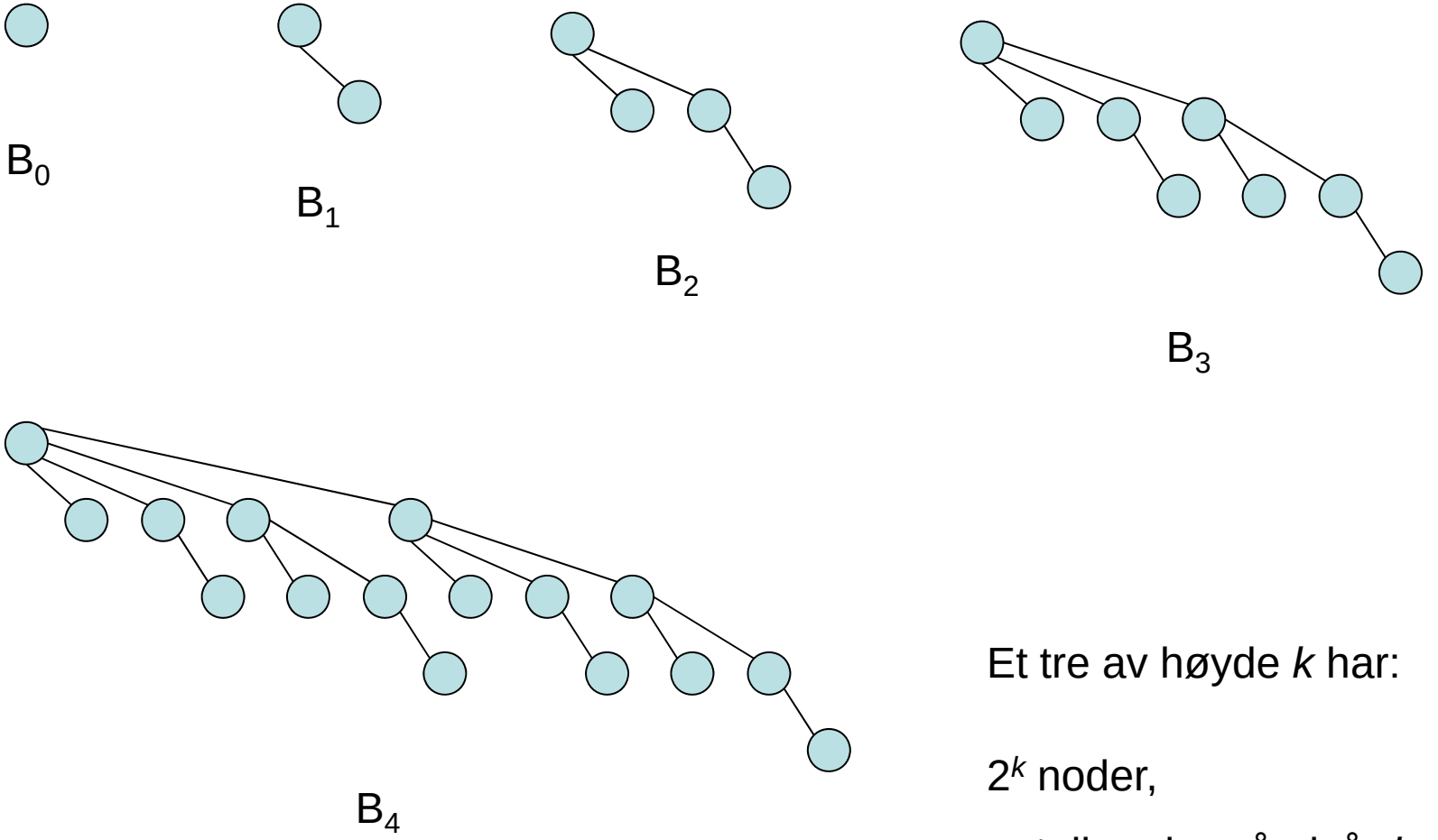
Binomialheaper

Binomialtrær



Binomialheaper

Binomialtrær



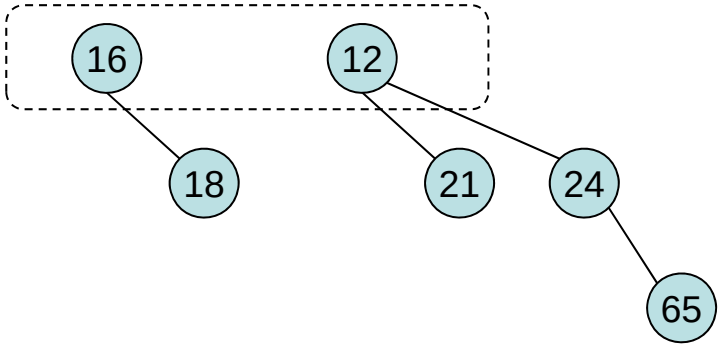
Et tre av høyde *k* har:

2^k noder,

antall noder på nivå *d* er $\binom{k}{d}$

Binomialheaper

Binomialheap

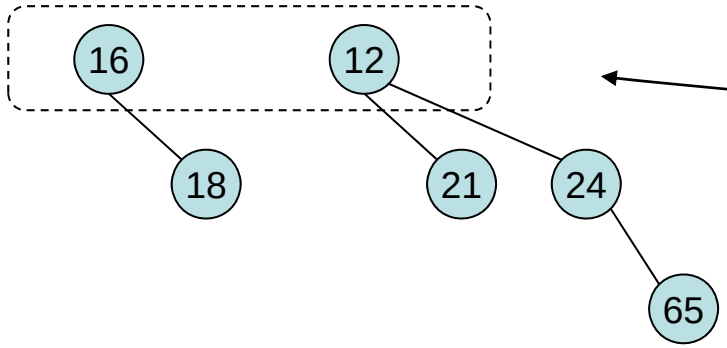


Maks ett tre av hver størrelse:

6 elementer: 6 binært = 011 (0+2+4) ~~B_0~~ B_1 B_2

Binomialheaper

Binomialheap

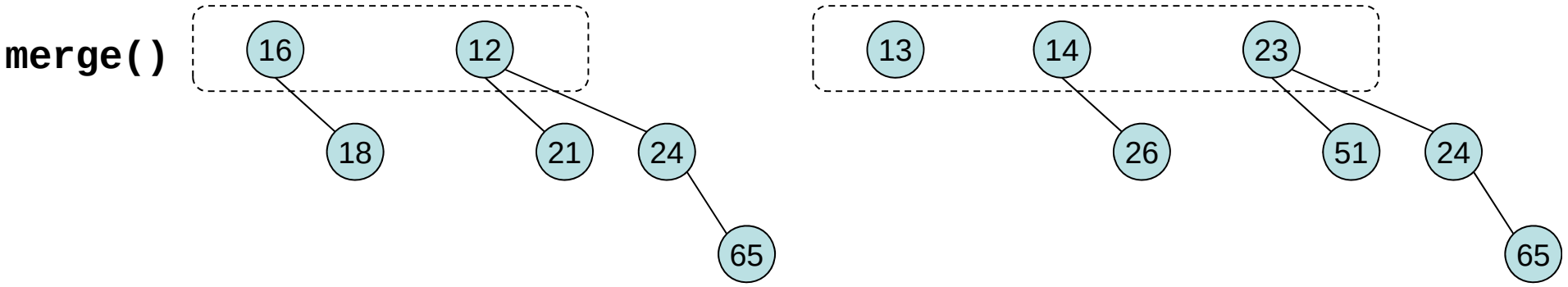


Maks ett tre av hver størrelse:

6 elementer: 6 binært = 011 (0+2+4) ~~B_0~~ B_1 B_2

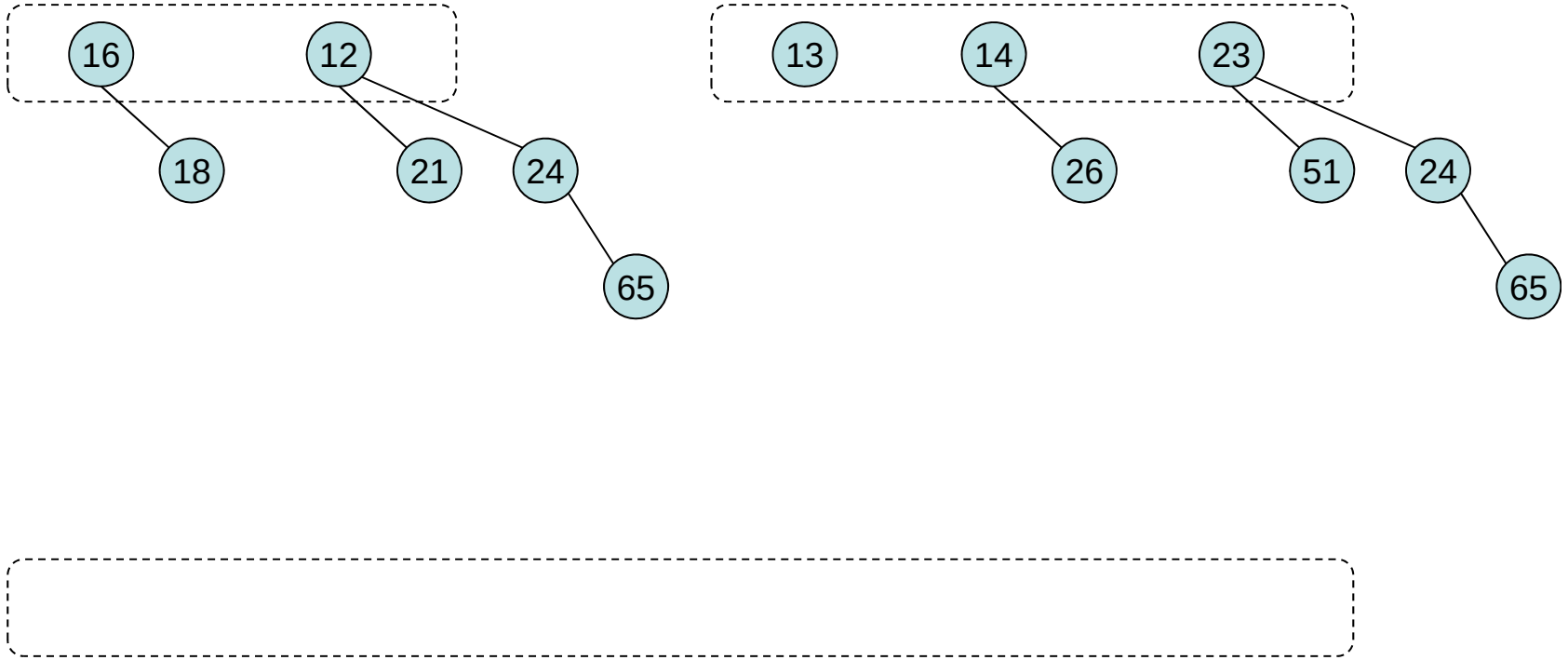
Lengden av rot-listen for en heap med *N* elementer er *O*(log *N*).
(Dobbelt lenket, sirkulær liste.)

Binomialheaper

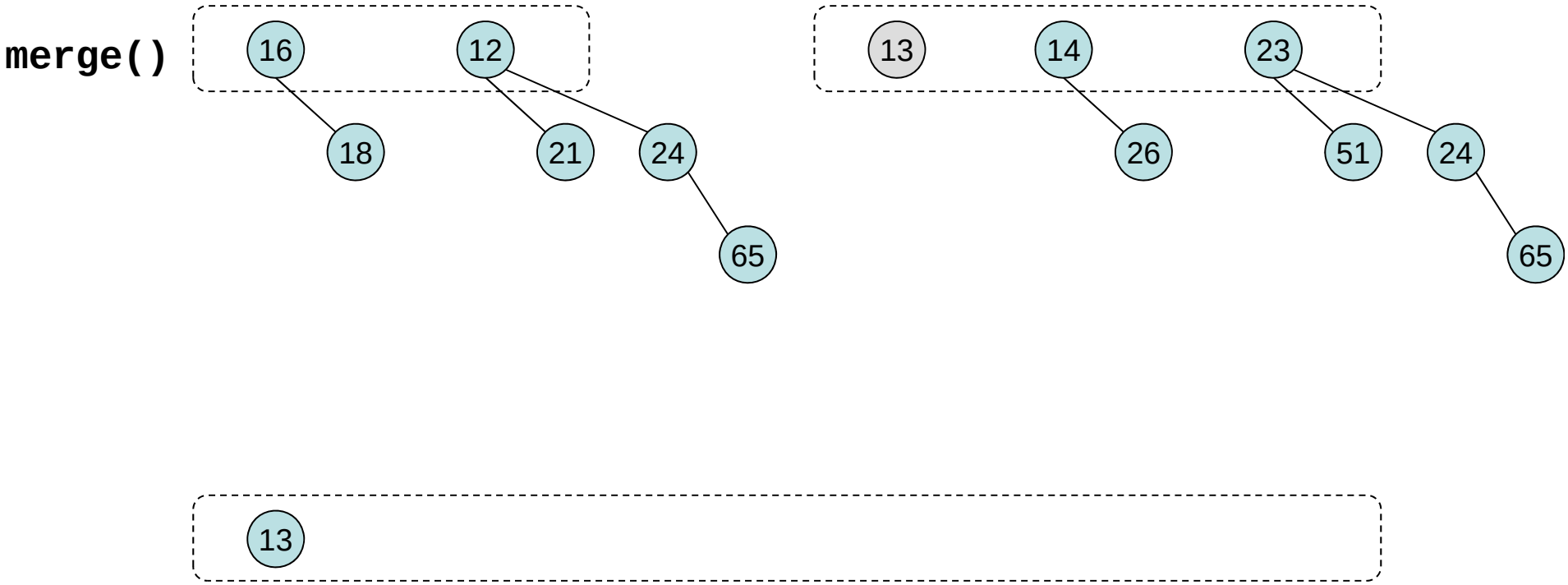


Binomialheaper

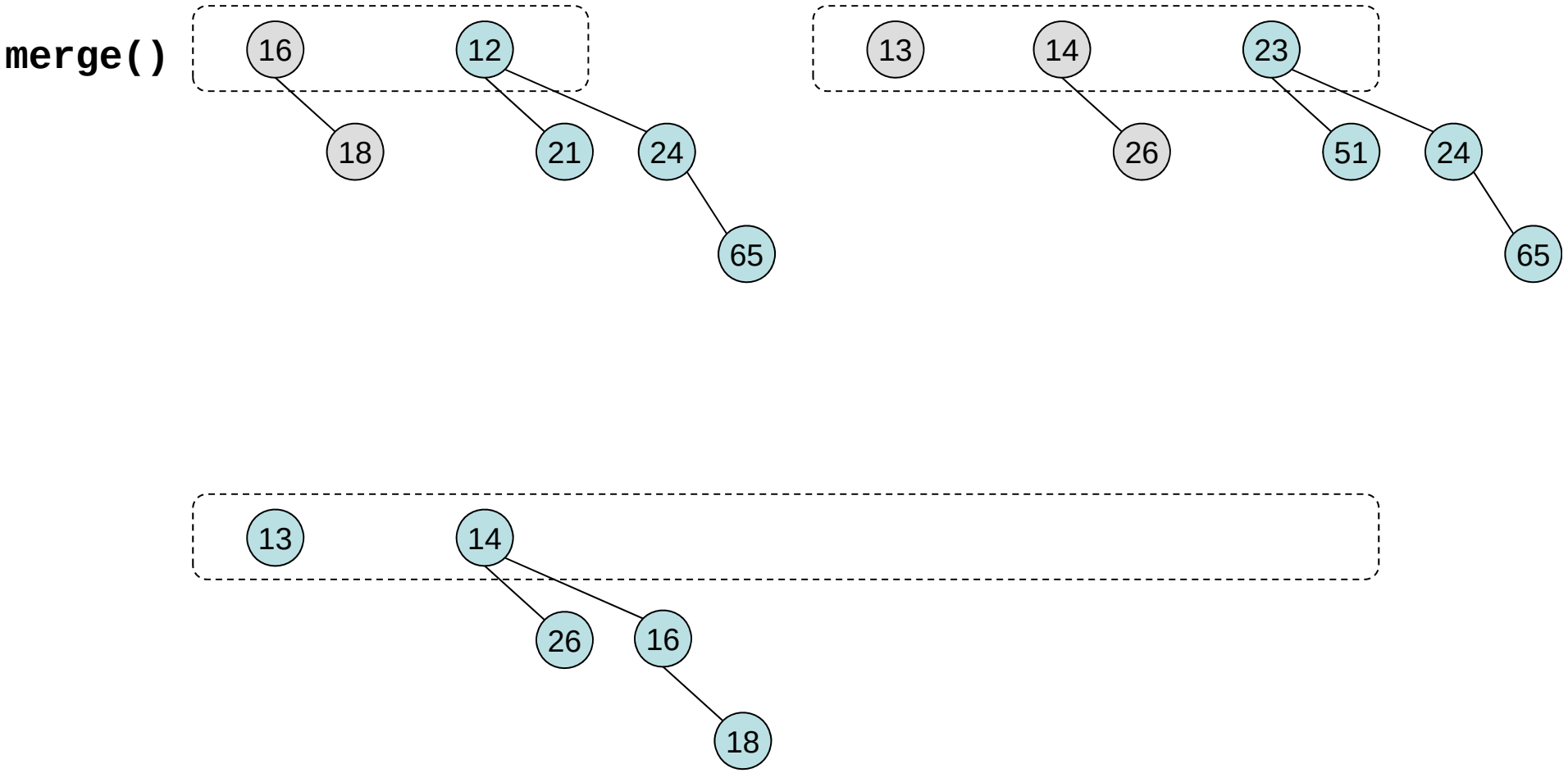
merge()



Binomialheaper

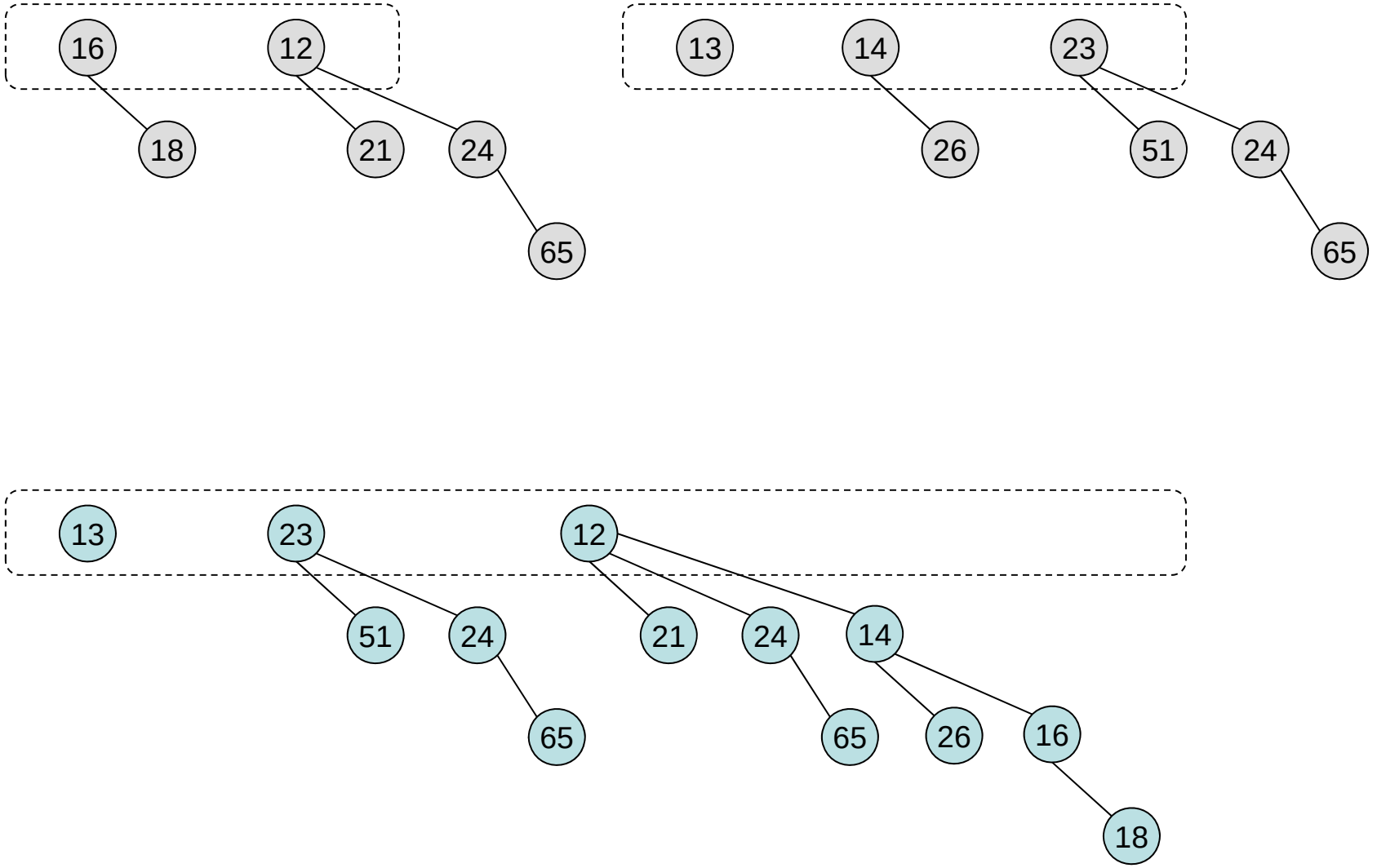


Binomialheaper



Binomialheaper

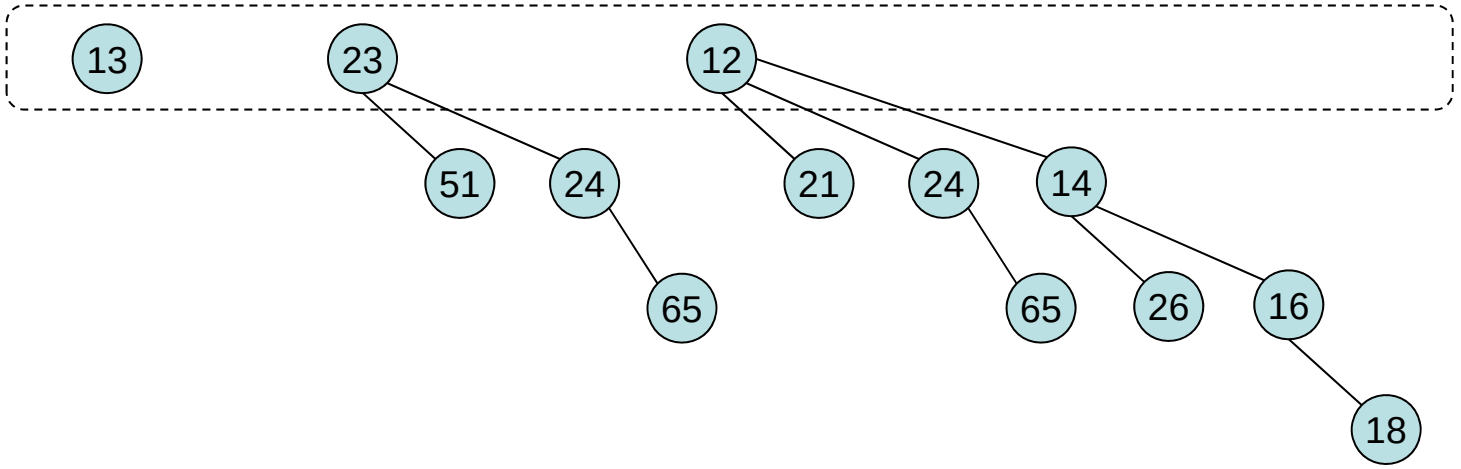
`merge()`



Trærne (rotlisten) holdes sortert etter høyde.

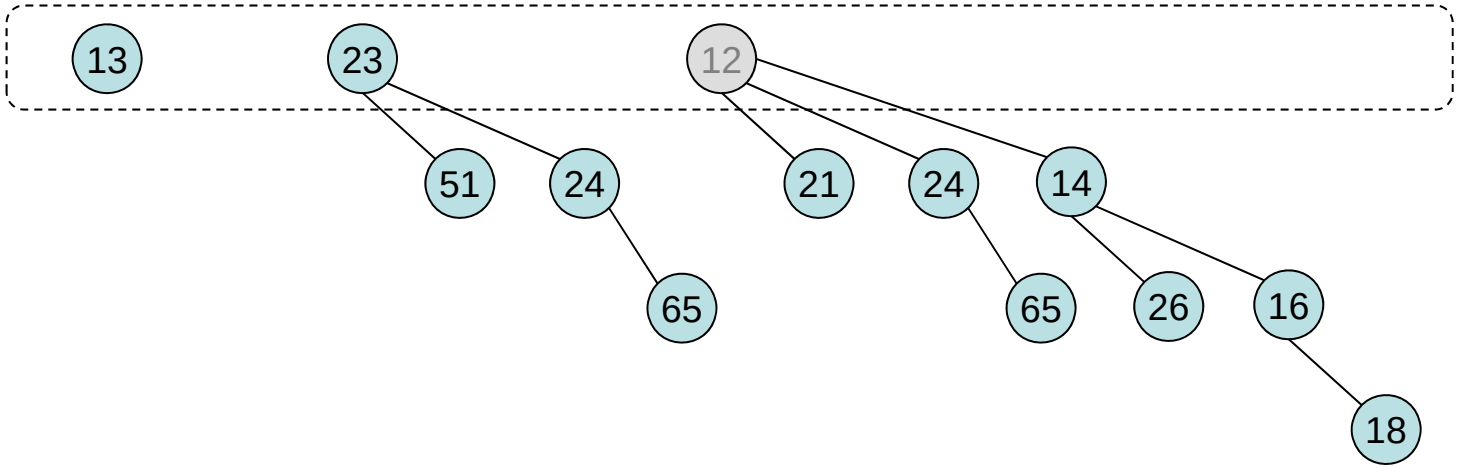
Binomialheaper

deleteMin()

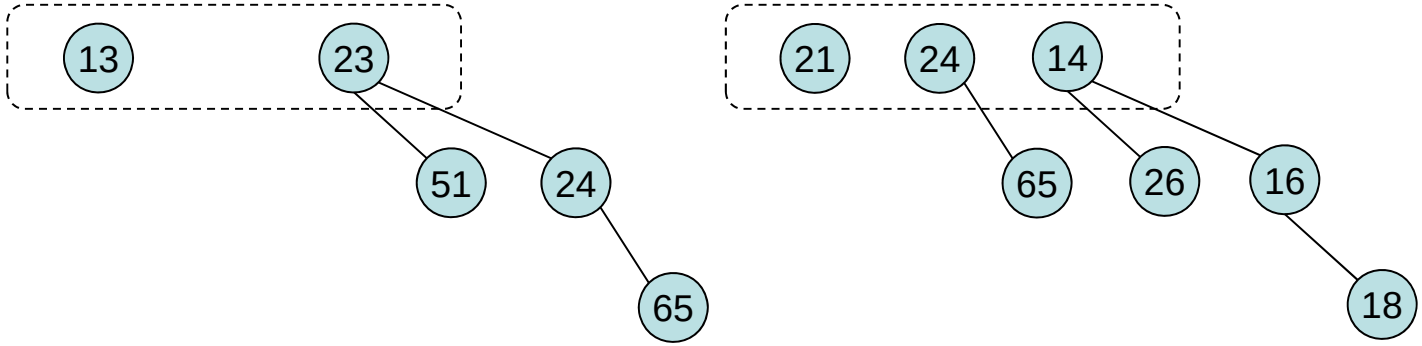


Binomialheaper

deleteMin()



merge()



Binomialheaper

	worst case	gjennomsnitt
`merge()`	$O(\log N)$	$O(\log N)$
`insert()`	$O(\log N)$	$O(1)$
`deleteMin()`	$O(\log N)$	$O(\log N)$
`buildHeap()`	$O(N)$	$O(N)$

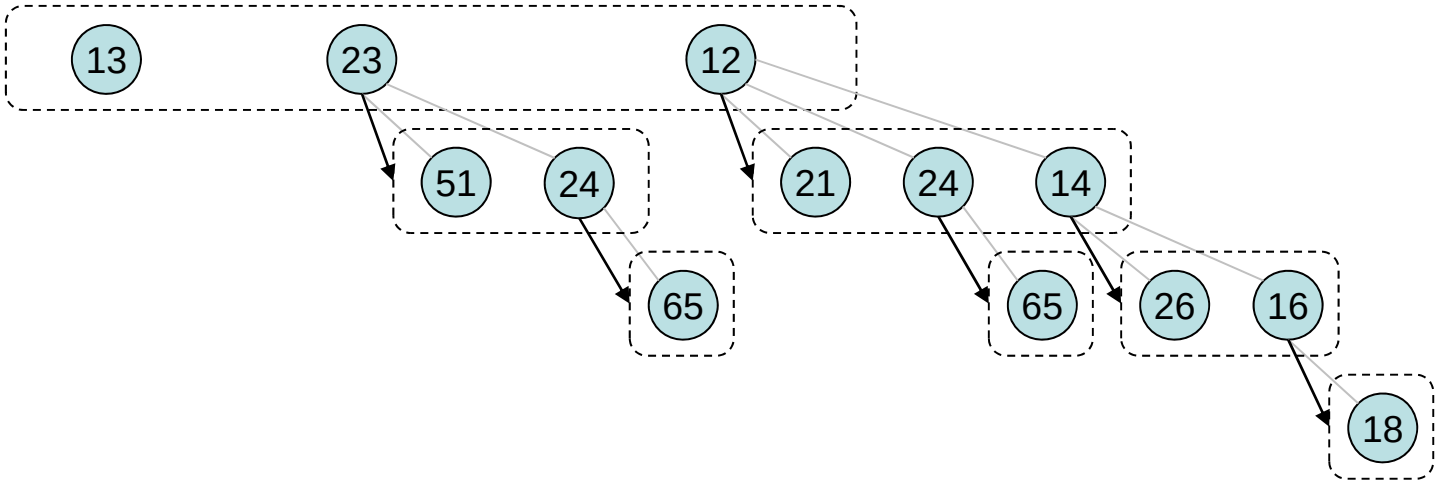
(Kjør N **`insert()`** i en tom heap.)

(N = antall elementer)

Binomialheaper

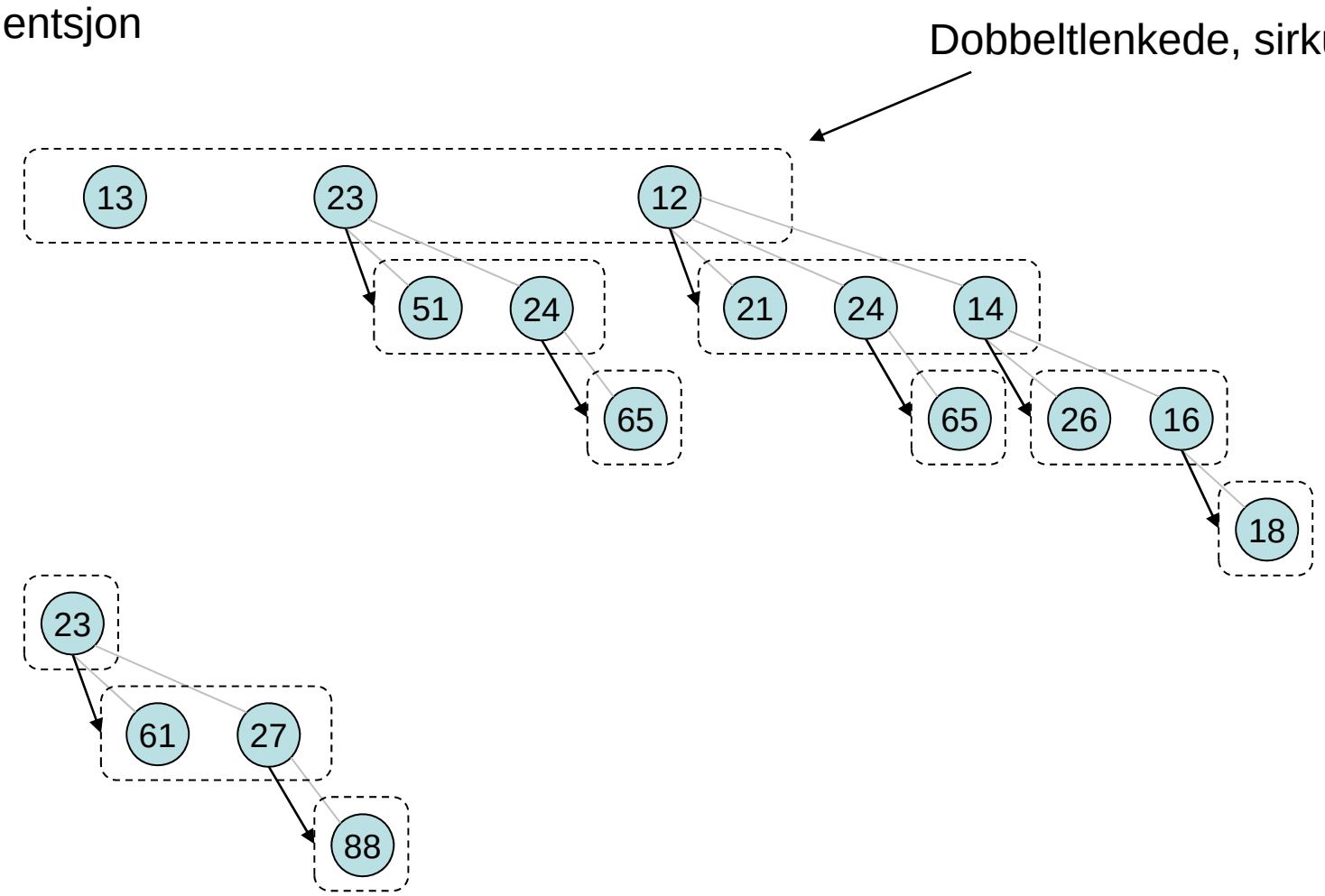
Implementsjon

Dobbeltlenkede, sirkulære lister



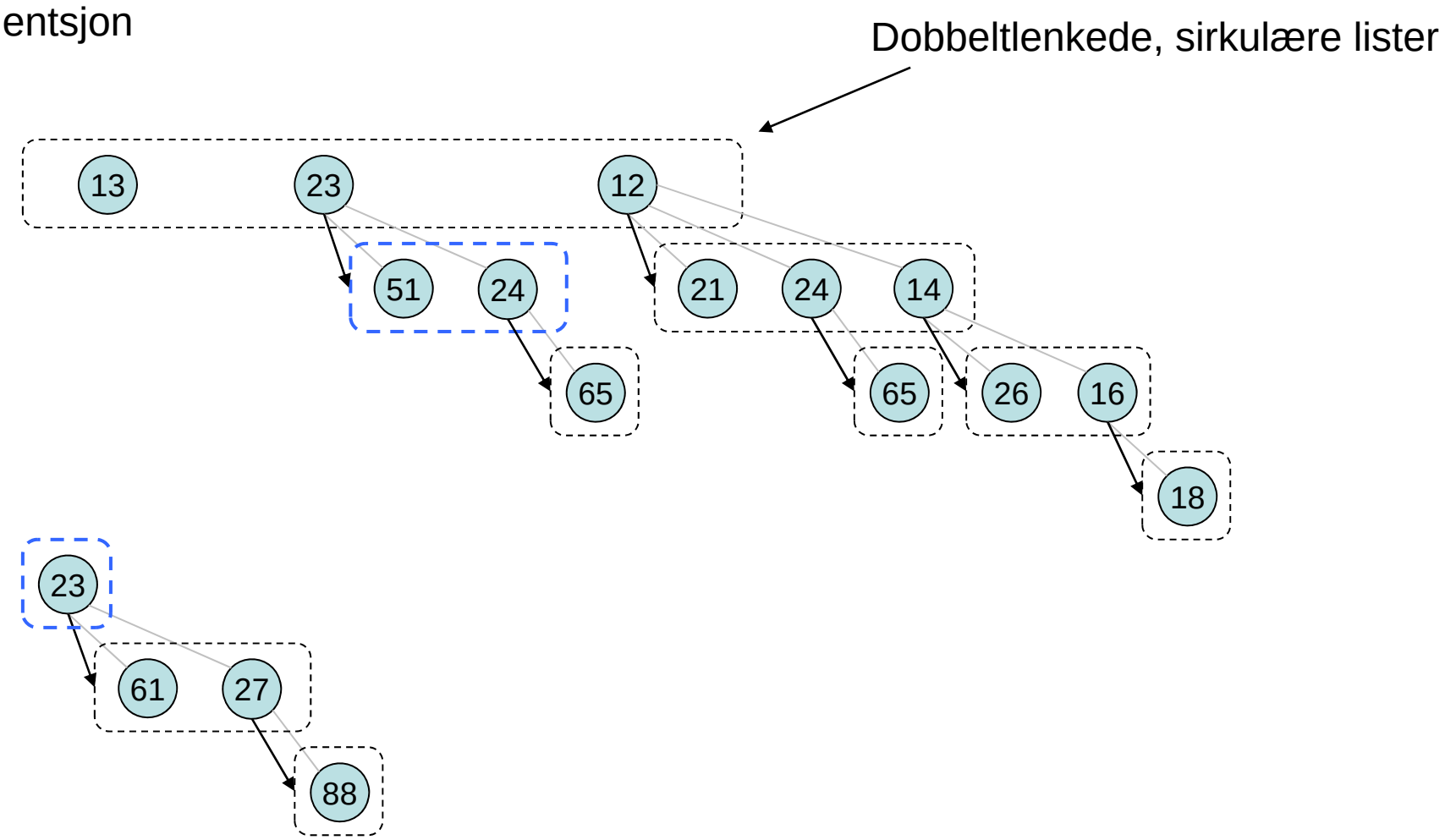
Binomialheaper

Implementsjon



Binomialheaper

Implementsjon



Fibonacciheaper

Meget elegant, og i teorien effektiv, måte å implementere heaper på: De fleste operasjoner har amortisert kjøretid *O*(1). (Fredman & Tarjan ’87)

`insert()`, **`decreaseKey()`** og **`merge()`**	*O*(1) amortisert tid
`deleteMin()`	*O*(log *N*) amortisert tid

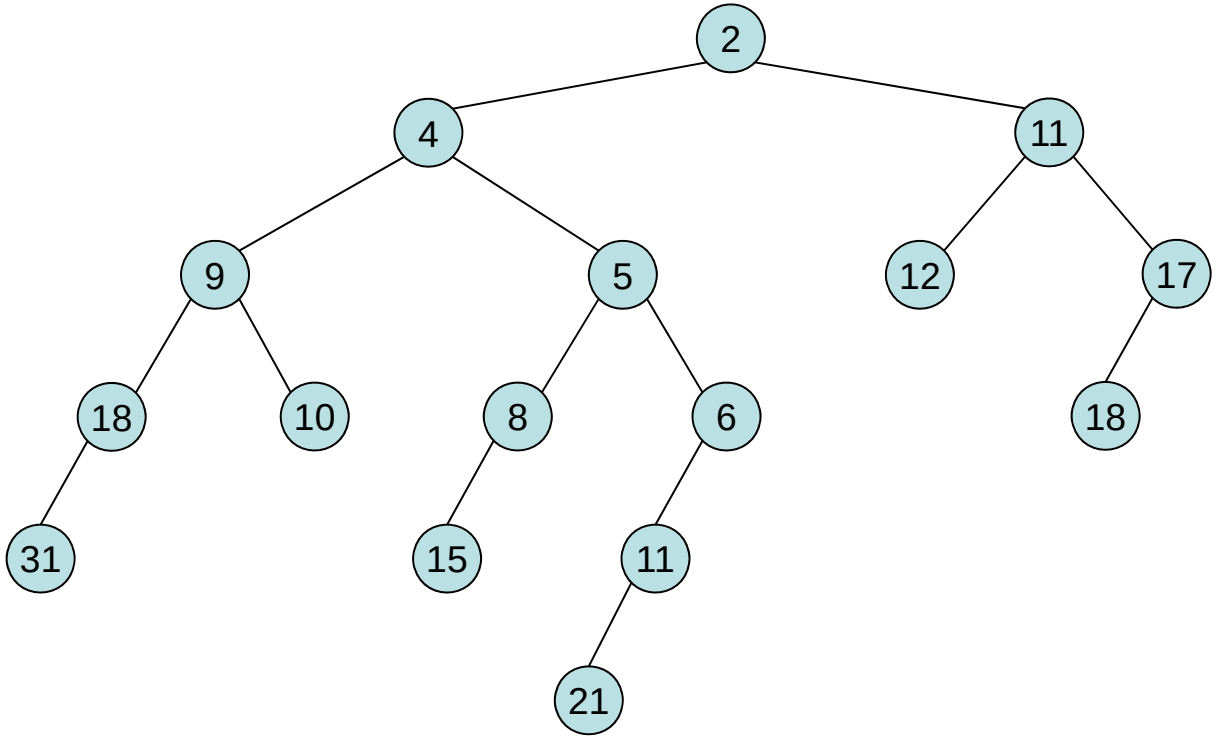
Kombinerer elementer fra venstrevridde heaper og binomialheaper.

I praksis litt komplisert å implementere, og enkelte skjulte konstanter er litt høye.

Best egnet når det er få **`deleteMin()`** i forhold til de andre operasjonene.
Datastrukturen utviklet i forbindelse med en korteste sti-algoritme. Også benyttet i spenntre-algoritmer.

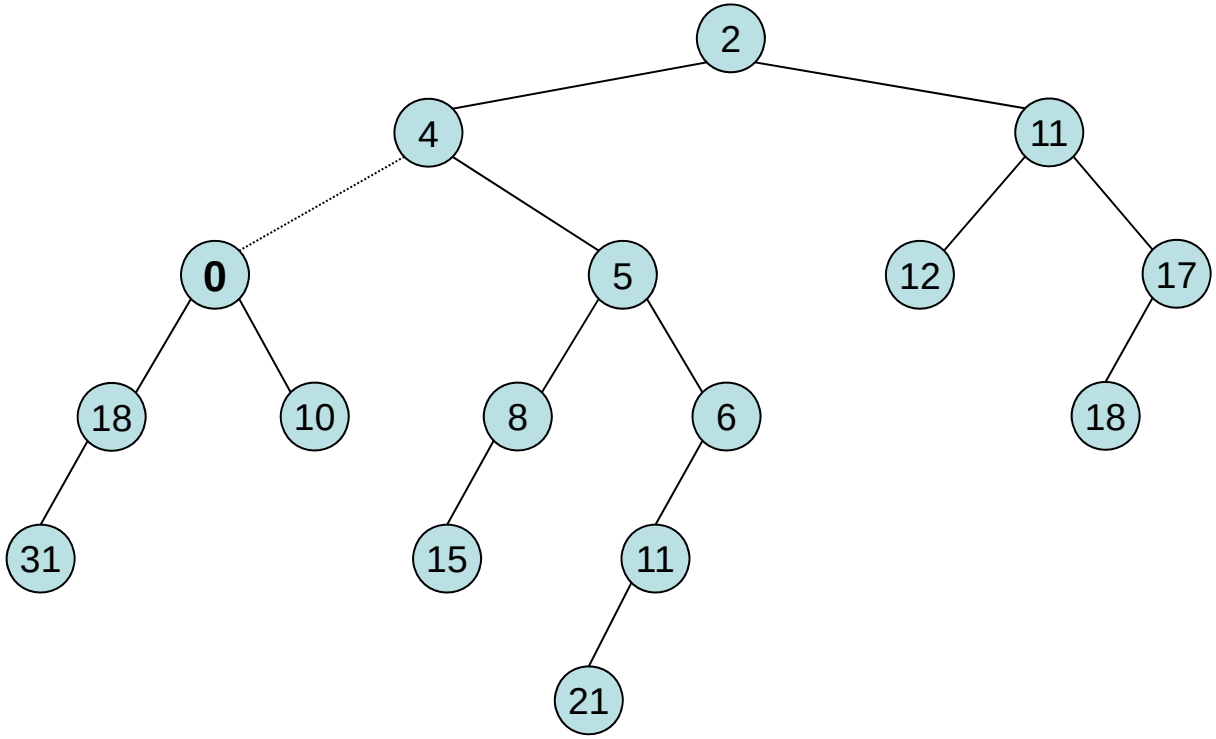
Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.



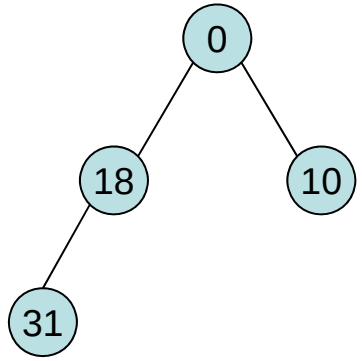
Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.

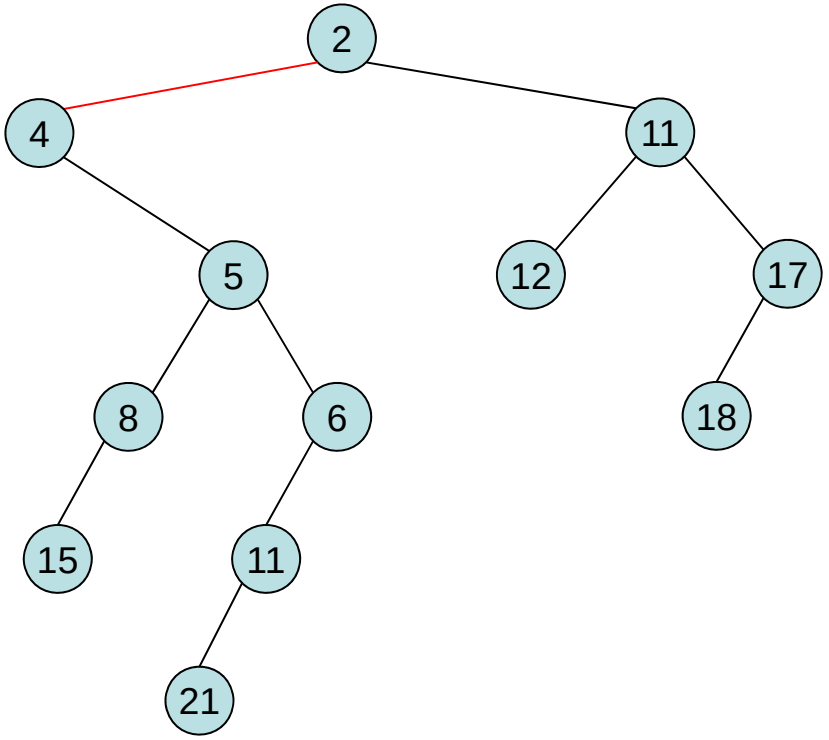


Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.



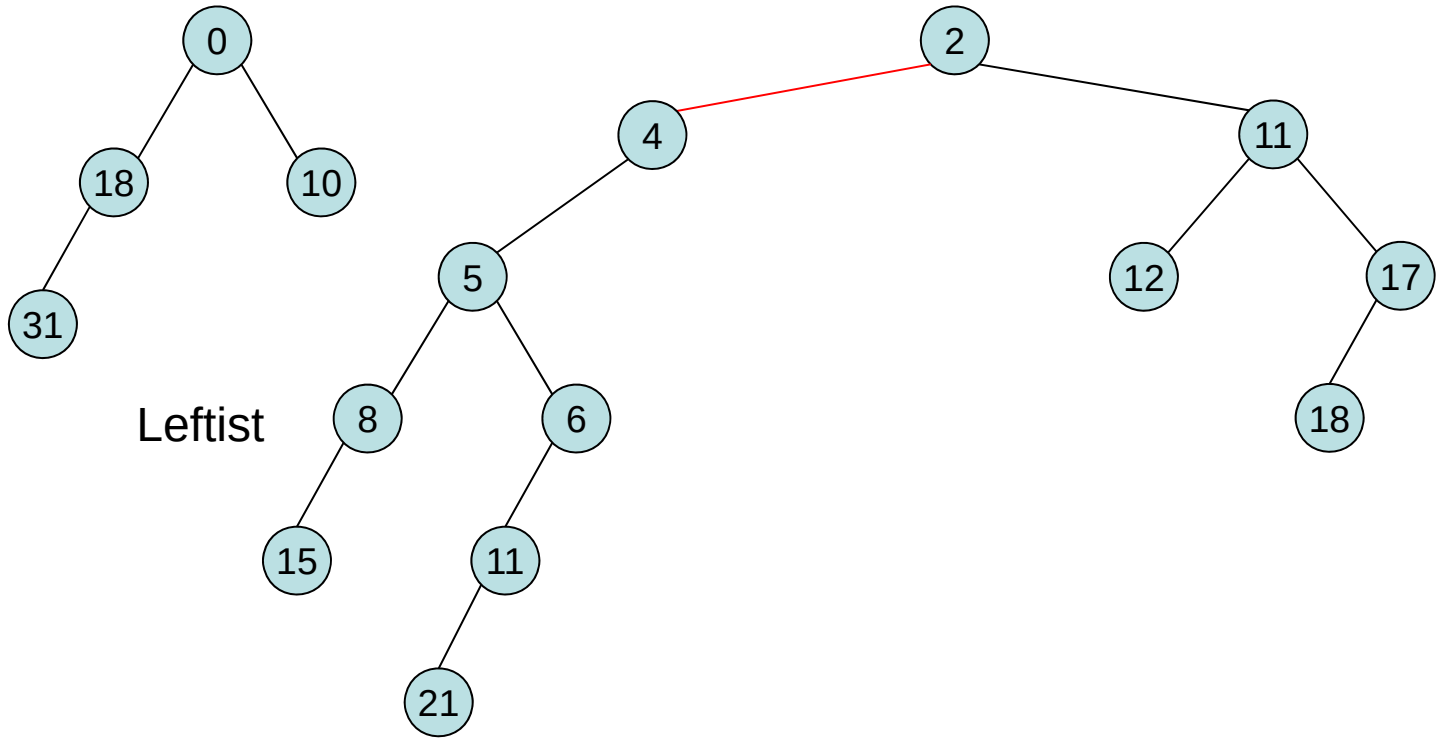
Leftist



Ikke leftist

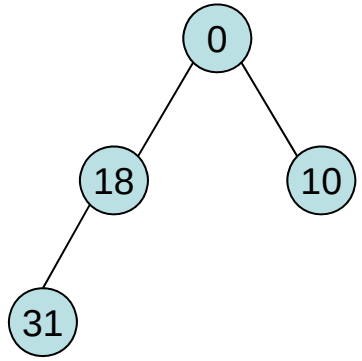
Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.

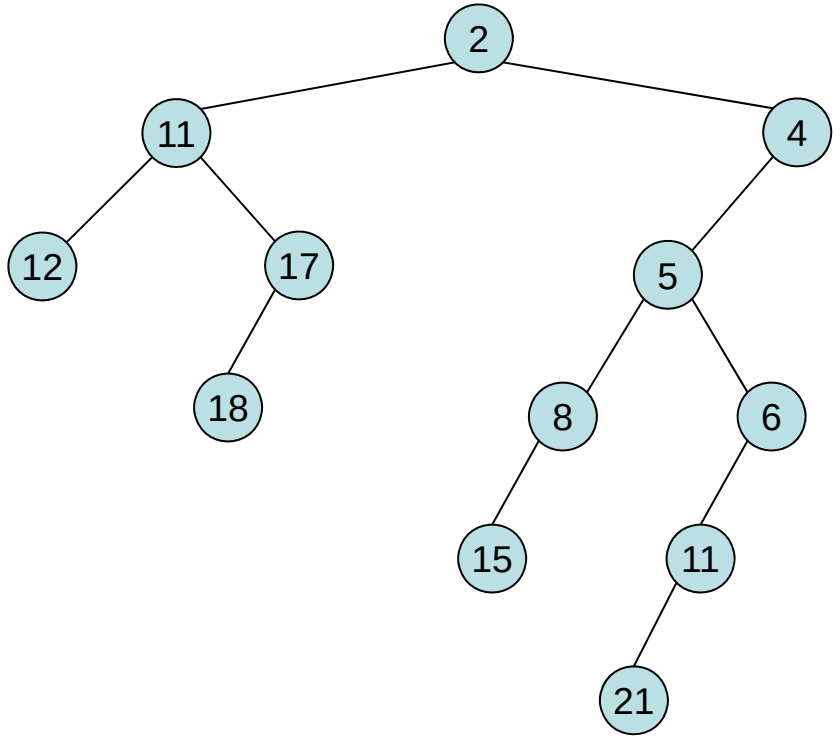


Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.



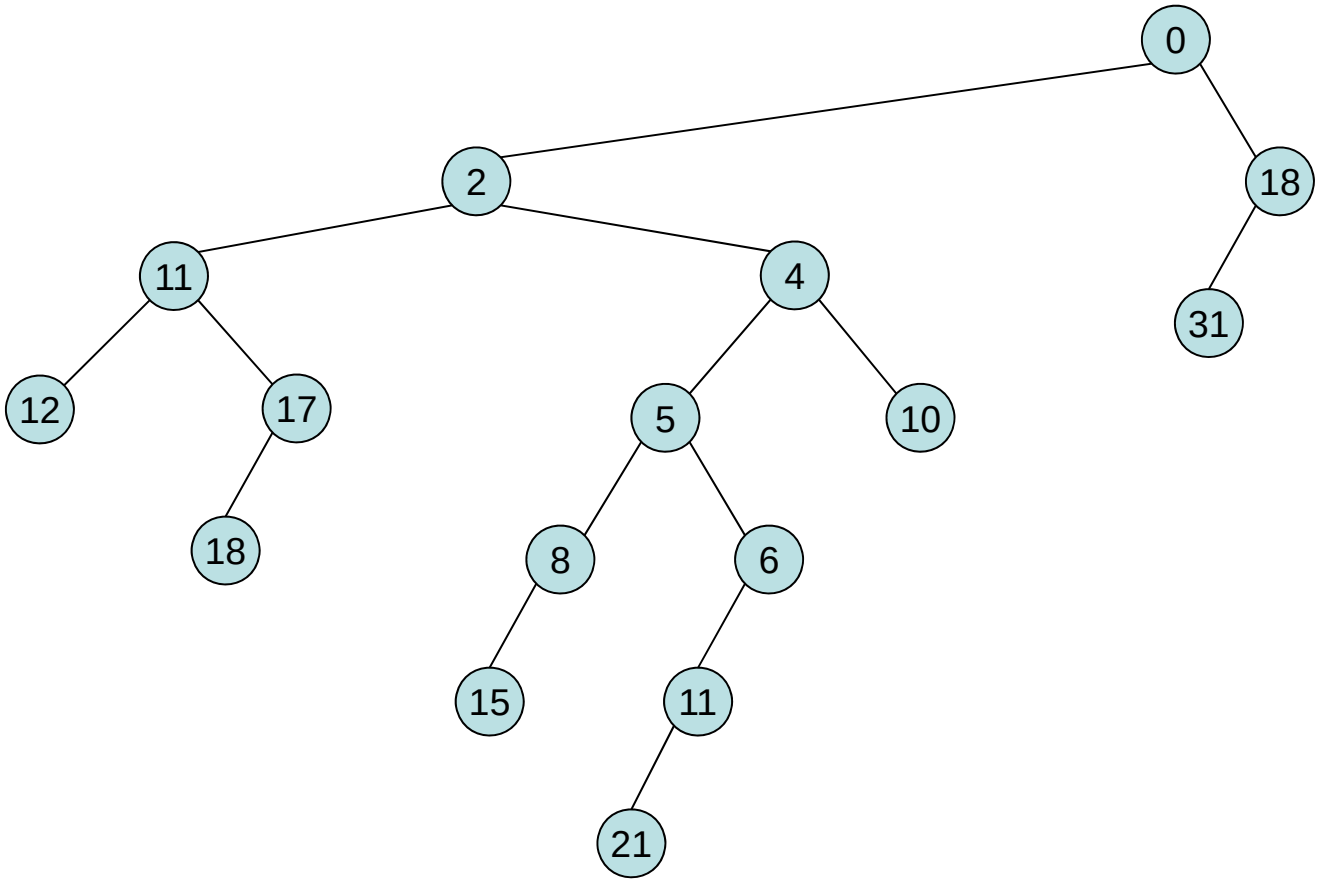
Leftist



Leftist

Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.

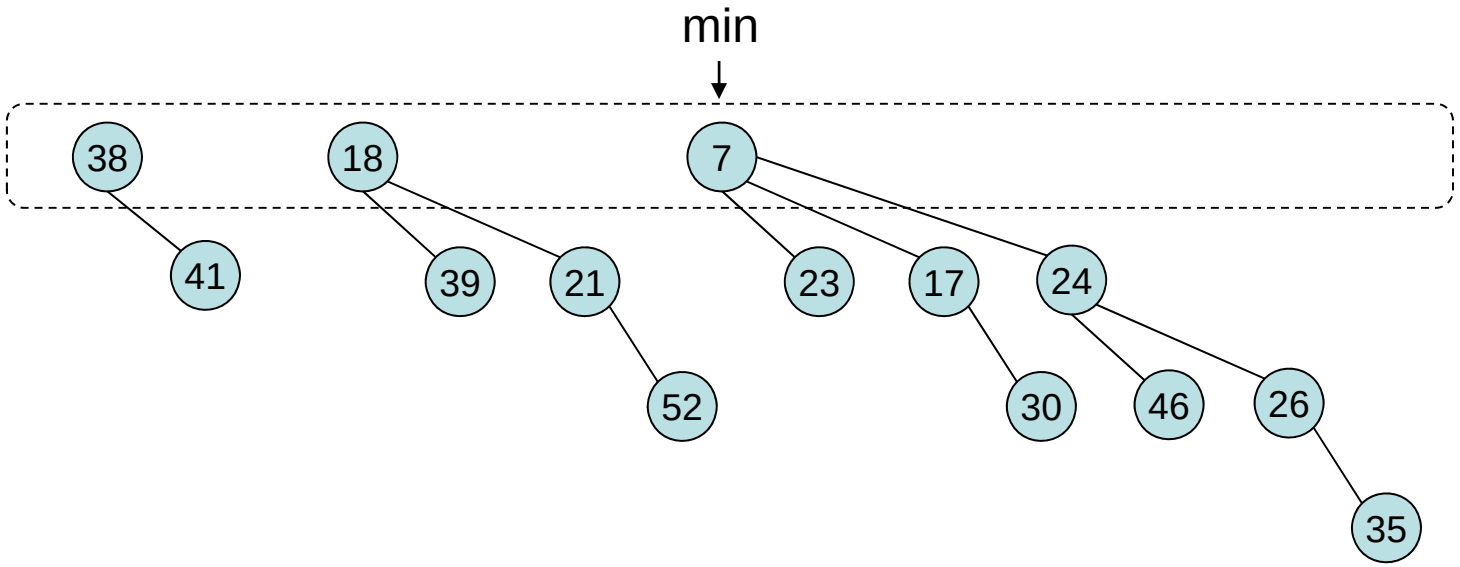


Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.

Metoden må imidlertid modifiseres litt, ettersom vi ønsker å bruke trær som er, eller nesten er, binomialtrær.

- Noder merkes første gang de mister ett barn.
- Andre gang de mister ett barn blir noden kappet av og blir rot i et eget tre, og merket fjernes.

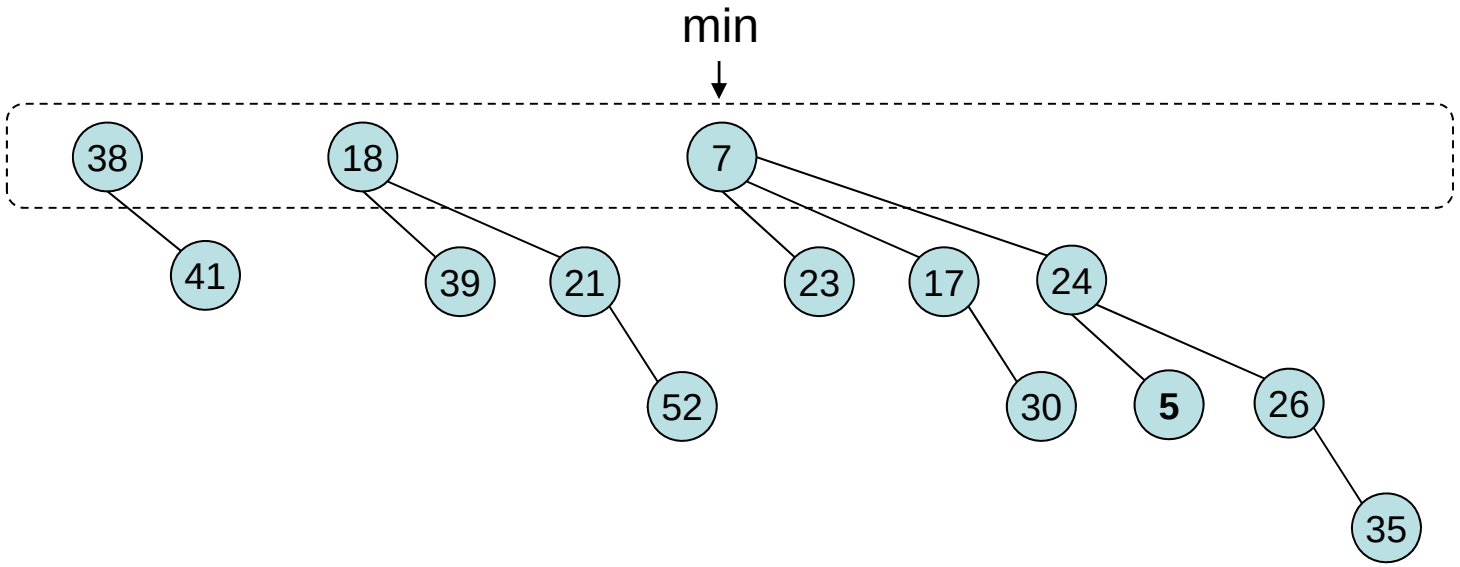


Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.

Metoden må imidlertid modifiseres litt, ettersom vi ønsker å bruke trær som er, eller nesten er, binomialtrær.

- Noder merkes første gang de mister ett barn.
- Andre gang de mister ett barn blir noden kappet av og blir rot i et eget tre, og merket fjernes.

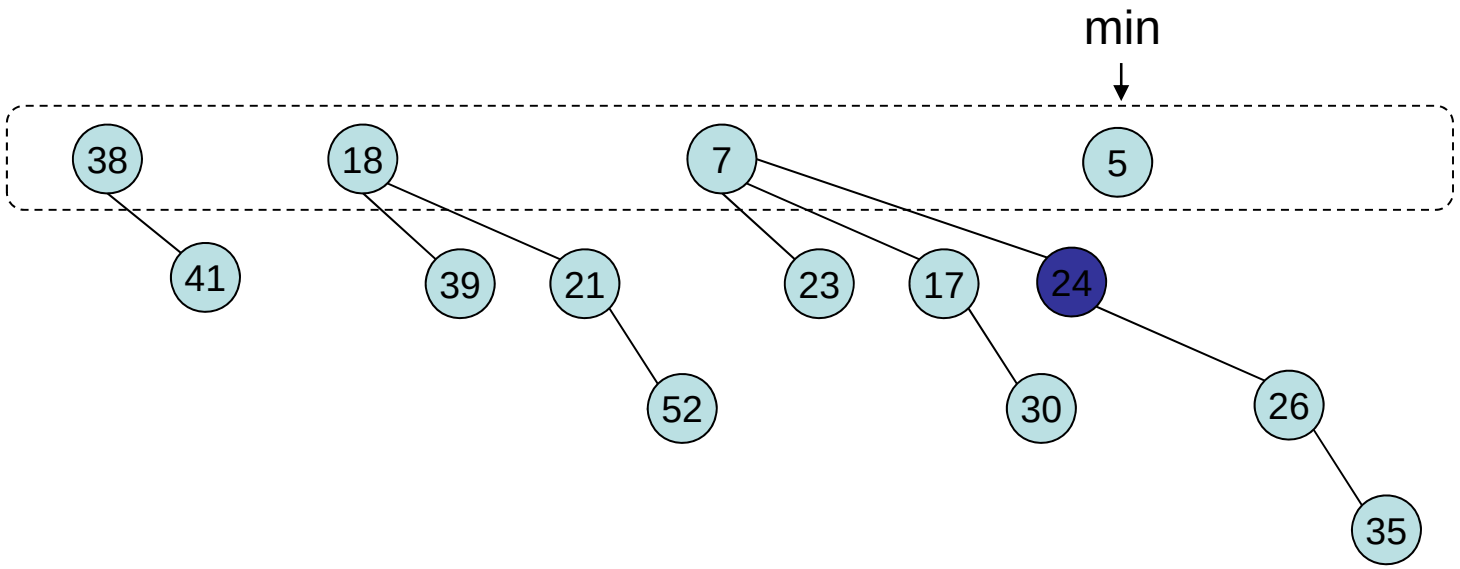


Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.

Metoden må imidlertid modifiseres litt, ettersom vi ønsker å bruke trær som er, eller nesten er, binomialtrær.

- Noder merkes første gang de mister ett barn.
- Andre gang de mister ett barn blir noden kappet av og blir rot i et eget tre, og merket fjernes.

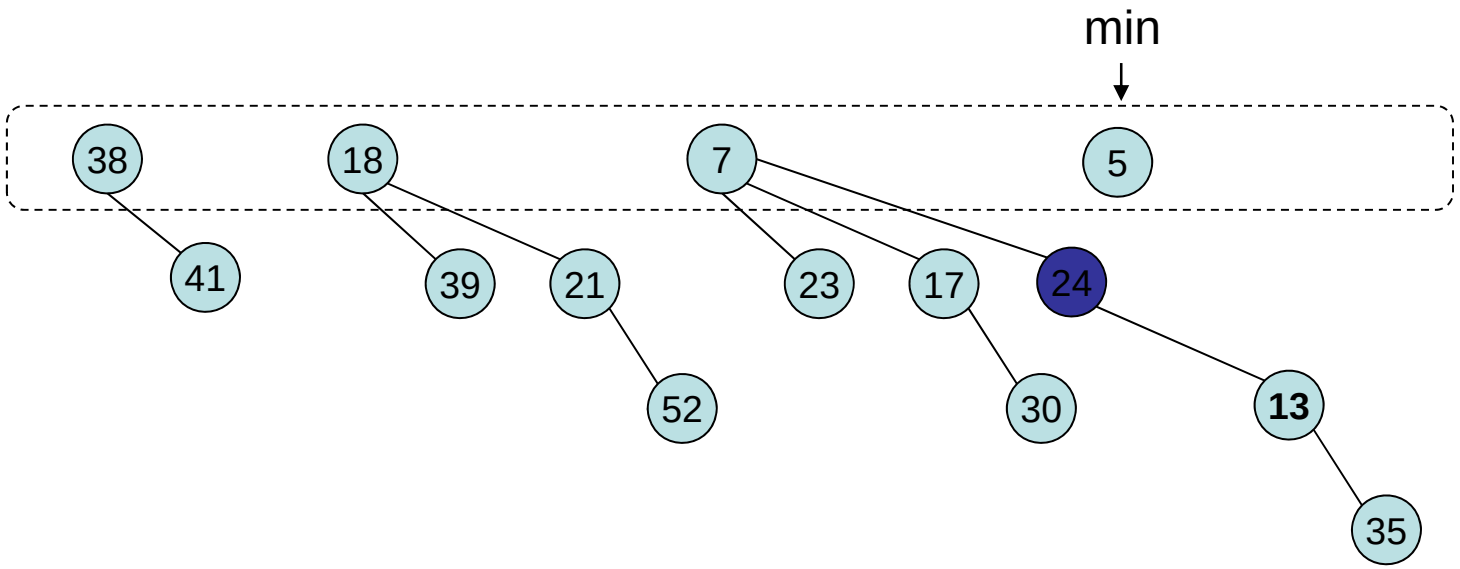


Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.

Metoden må imidlertid modifiseres litt, ettersom vi ønsker å bruke trær som er, eller nesten er, binomialtrær.

- Noder merkes første gang de mister ett barn.
- Andre gang de mister ett barn blir noden kappet av og blir rot i et eget tre, og merket fjernes.

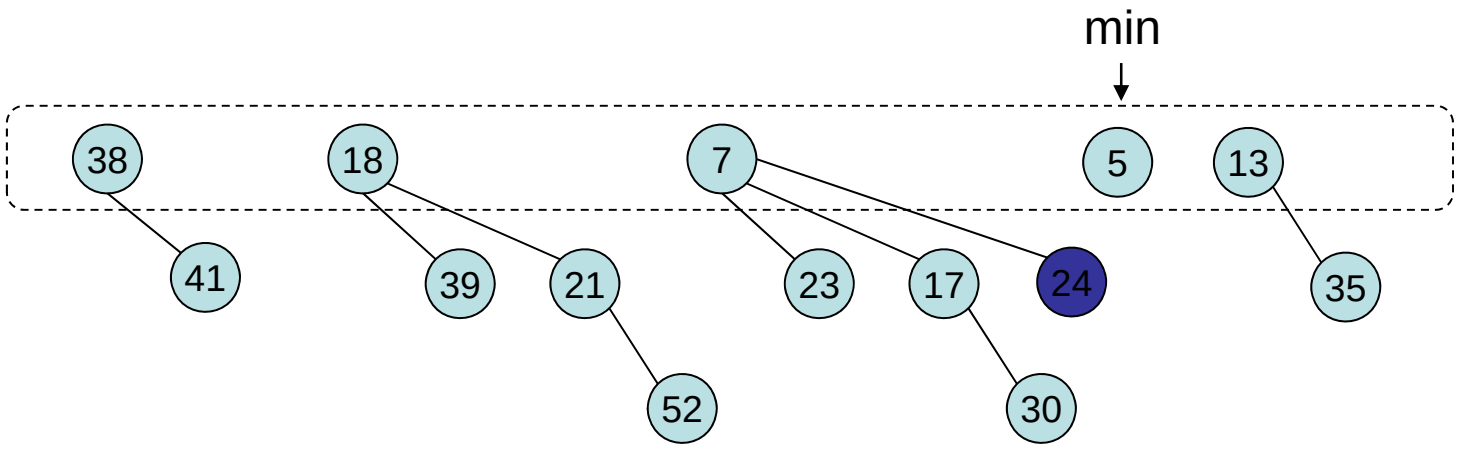


Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.

Metoden må imidlertid modifiseres litt, ettersom vi ønsker å bruke trær som er, eller nesten er, binomialtrær.

- Noder merkes første gang de mister ett barn.
- Andre gang de mister ett barn blir noden kappet av og blir rot i et eget tre, og merket fjernes.

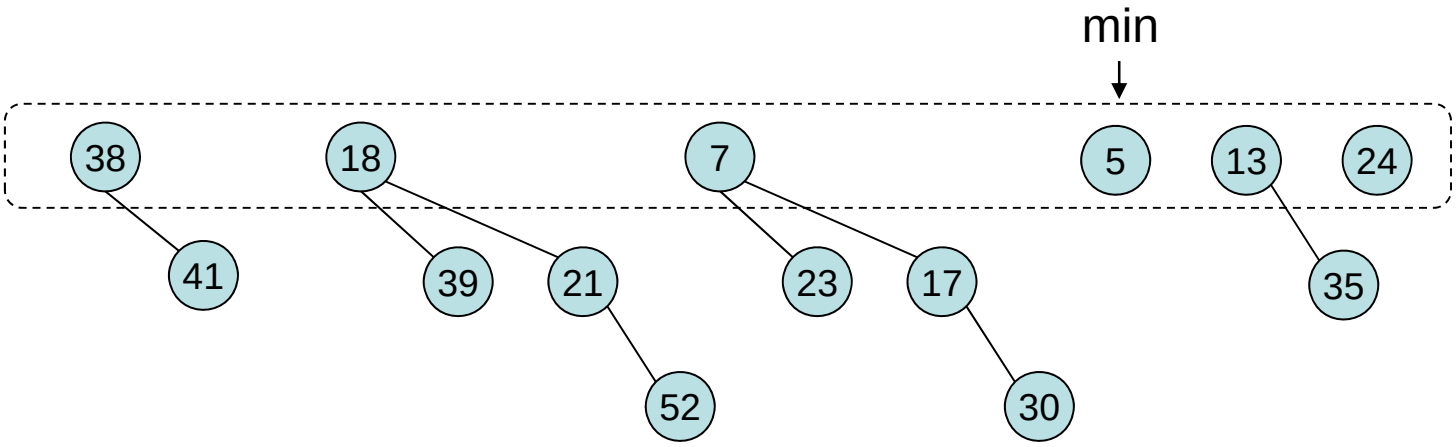


Fibonacciheaper

Fra venstrevridde heaper tar vi med en smart **`decreaseKey()`** metode.

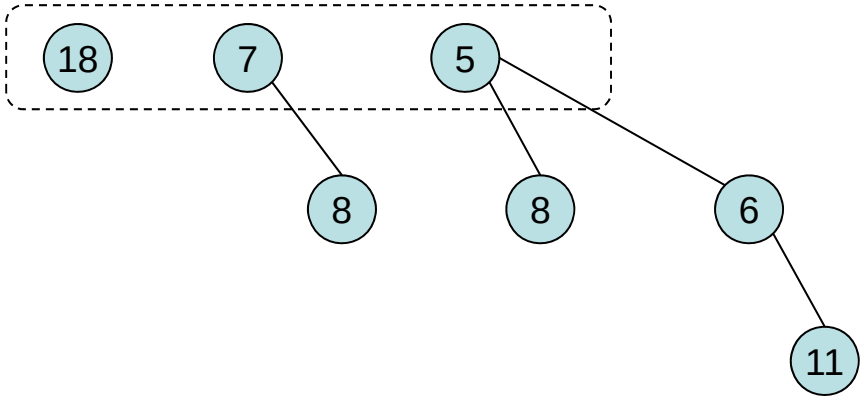
Metoden må imidlertid modifiseres litt, ettersom vi ønsker å bruke trær som er, eller nesten er, binomialtrær.

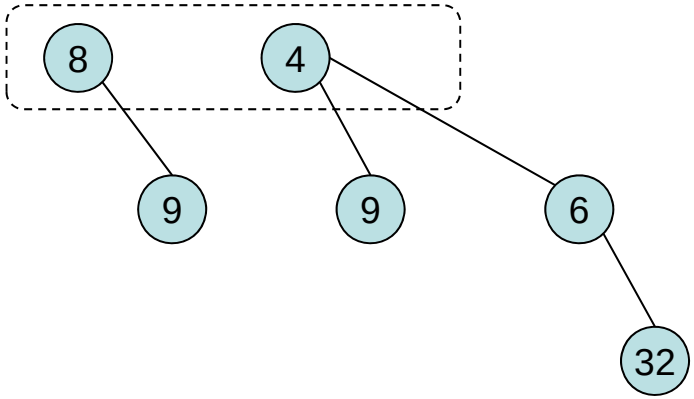
- Noder merkes første gang de mister ett barn.
- Andre gang de mister ett barn blir noden kappet av og blir rot i et eget tre, og merket fjernes.



Fibonacciheaper

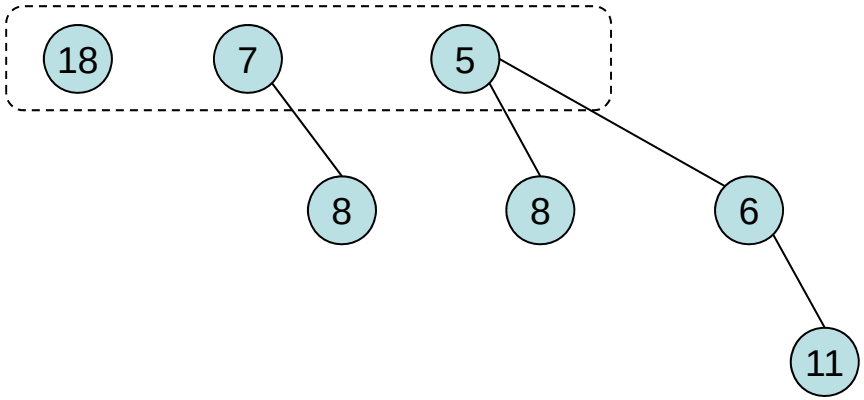
Vi bruker *lazy merging* / *lazy binomial queue*.

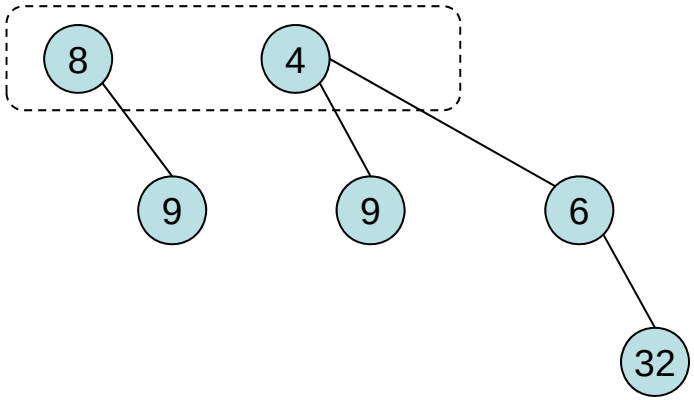


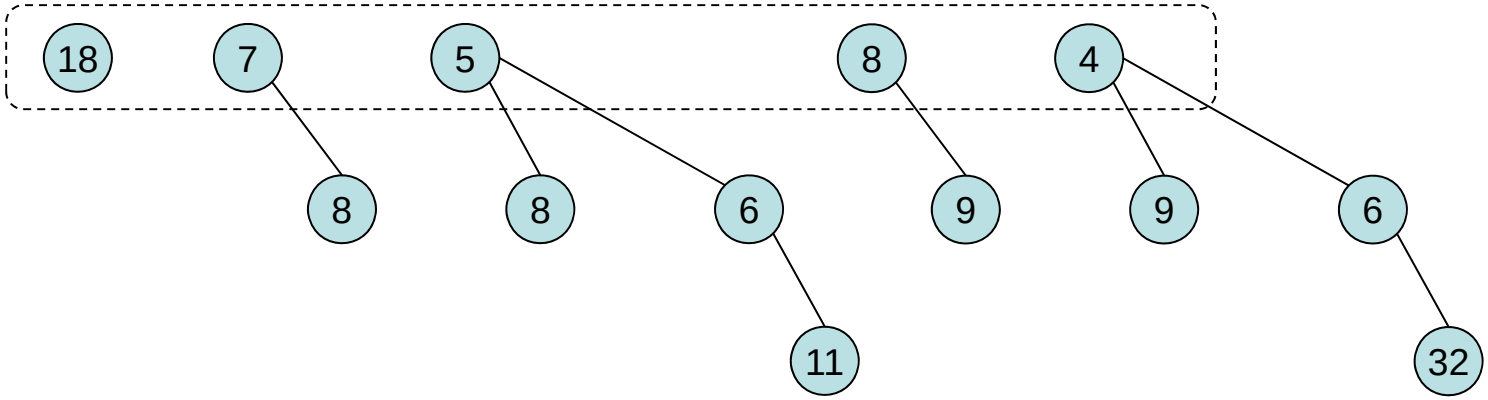


Fibonacciheaper

Vi bruker *lazy merging* / *lazy binomial queue*.







Fibonacciheaper

Problemet med **`decreaseKey()`**-metoden vår og *lazy merging* er selvsagt at vi må rydde opp i etterkant. Dette gjøres i **`deleteMin()`**, som derfor får ”høy” kjøretid (*O*(log *N*) amortisert tid) .

Alle trærne gjennomgåes, de minste først, og slåes sammen, slik at vi får maks ett tre av hver størrelse. Hver rot vet hvor mange barn den har, og det er dette vi bruker som størrelse. (Husk hvordan binomialtrær bygges.)

Trærne legges i lister, en liste per størrelse, og så begynner vi å spleise, de minste først.

Fibonacciheaper

	Amortisert tid
`insert()`	$O(1)$
`decreaseKey()`	$O(1)$
`merge()`	$O(1)$
`deleteMin()`	$O(\log N)$
`buildHeap()`	$O(N)$

(Kjør N **`insert()`** i en tom heap.)

(N = antall elementer)