WFF – Well formed formula

Streng av utsagnsvariabler (P,Q,R…), sannhetssymboler, konnektiver og parenteser, bygd opp etter følgende *induktive* regler:

- true, false, P,Q,R… er wff'er
- Hvis A er en wff, er $\neg$A og (A) wff'er
- Hvis A og B er wff'er, er også
  A$\rightarrow$B, A$\wedge$B og A$\vee$B wff'er

- Noe er en wff bare hvis det følger av reglene over

Velformet formel (vff)

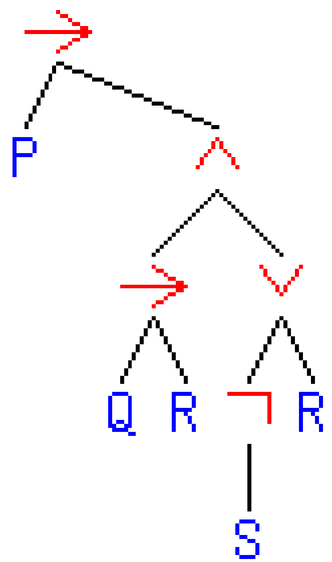
… sier man gjerne på norsk. I praksis blir dette tungvint, og vi/jeg kommer ofte til å si *formel* eller *utsagn* når vi mener vff/wff.

Eksempler på wff'er

- P
- Q
- R
- true
- false
- $P \wedge Q$
- $(P \wedge Q)$
- $Q \vee R$
- $P \wedge \neg(Q \vee R)$
- $(P \wedge \neg Q) \vee R$

Syntakstre

$$(P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \wedge ((\neg S) \vee R)))$$

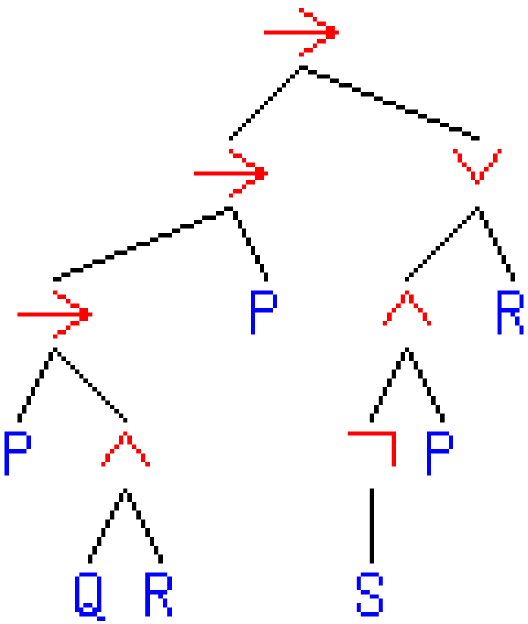


Et syntakstre viser strukturen i en wff,
dvs. historien om hvordan wff'en ble bygd opp

(Treet over laget jeg hos Gateway to logic)

Hva med følgende?

$$P \rightarrow Q \wedge R \rightarrow P \rightarrow \neg\, S \wedge P \vee R$$



Presedens-regler

Vi går innenfra og ut, og “anvender” konnektiver i rekkefølgen

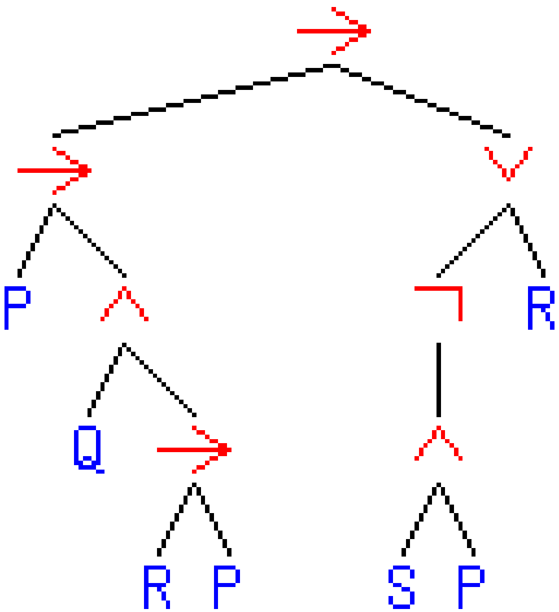
1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\rightarrow$

Binære konnektiver er dessuten venstre-assosiative,
det vil si vi “anvender” forekomster (av samme konnektiv)
lengst til venstre først.

- $(P \wedge (\neg Q)) \vee R$
- $((\neg P) \vee Q) \rightarrow ((\neg Q) \wedge R)$
- $(P \wedge Q) \wedge R$
- $(P \vee Q) \vee R$
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$

Hva med følgende?

$$P \rightarrow Q \land (R \rightarrow P) \rightarrow \neg\,(S \land P) \lor R$$



Substitusjon/Innsetting

$A(P/B)$ Setter inn vff'en B for alle forekomster av utsagnsvariabelen P i vff'en A

Eksempel:

$$((Q \wedge R) \vee (Q \rightarrow S))\,(Q/(S \rightarrow R))$$

$$= (((S \rightarrow R) \wedge R) \vee ((S \rightarrow R) \rightarrow S))$$

Instansieringsregel for tautologier

Hvis A er en tautologi, så er A(P/B) en tautologi

Eksempel:

Siden $(P \to (Q \to P))$ er en tautologi,

så er $((Q \land \neg R) \to (Q \to (Q \land \neg R)))$ det også

Ekvivalens

- To wff'er A og B er ekvivalente hviss de alltid har samme sannhetsverdi, altså hviss $A \leftrightarrow B$ er en tautologi.

$A \equiv B$ uttrykker påstanden at A og B er ekvivalente.

$A \equiv B$ er altså en påstand om to wff'er A og B, men er ikke selv noen wff. Det gir for eksempel ikke mening å spørre om sannhetsverditabellen til $\equiv$

Instansieringsregel for ekvivalenser

Hvis $A \equiv C$, så $A(P/B) \equiv C(P/B)$

Eksempel:

Siden $\neg(P \to Q) \equiv (P \land \neg Q)$,

har vi også $\neg(P \to (P \land \neg R)) \equiv (P \land \neg(P \land \neg R))$

Substitusjonsregel for ekvivalenser

Hvis $B \equiv C$, så $A(P/B) \equiv A(P/C)$

Eksempel:

Siden $\neg(Q \to R) \equiv (Q \land \neg R)$,

har vi også $(Q \land \neg\neg(Q \to R)) \equiv (Q \land \neg(Q \land \neg R))$

Begreper/temaer videre idag og onsdag

- Ekvivalenser som *omskrivningsregler*
- Disjunktiv normalform, og metoder for å finne dette
- Full disjunktiv normalform
- Tilsvarende for konjunktiv normalform
- Quines metode
- Komplette mengder av konnektiver

Noen nyttige ekvivalenser

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

(assosiativitet for $\wedge$ og assosiativitet for $\vee$)

$$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \equiv (B \vee A)$$

(kommutativitet for $\wedge$ og kommutativitet for $\vee$)

$$(A \wedge (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$(A \vee (B \wedge C)) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

(distributivitet)

(mange flere side 354)

Bruk av ekvivalenser som *omskrivningsregler*

$$
\begin{aligned}
& \neg((P \to Q) \to (Q \to R)) \\
\equiv\ & (P \to Q) \land \neg\,(Q \to R)) \\
\equiv\ & (P \to Q) \land (Q \land \neg\, R)) \\
\equiv\ & (\neg\, P \lor Q) \land (Q \land \neg\, R)) \\
\equiv\ & ((Q \land \neg\, R) \land (\neg\, P \lor Q)) \\
\equiv\ & ((Q \land \neg\, R) \land \neg\, P) \lor ((Q \land \neg\, R) \land Q)
\end{aligned}
$$

bruker $\neg\,(A \to B) \equiv (A \land \neg\, B)$

$$\neg\,(A \to B) \equiv (A \land \neg\, B)$$

$$(A \to B) \equiv (\neg\, A \lor B)$$

$$(A \land B) \equiv (B \land A)$$

$$(A \land (B \lor C)) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$

litteral

fundamental konjunksjon

disjunktiv normalform

Bruk av ekvivalenser som *omskrivningsregler*

$$\neg((P \to Q) \to (Q \to R))$$
$$\equiv (P \to Q) \land \neg (Q \to R))$$
$$\equiv (P \to Q) \land (Q \land \neg R))$$
$$\equiv (\neg P \lor Q) \land (Q \land \neg R))$$
$$\equiv ((Q \land \neg R) \land (\neg P \lor Q))$$
$$\equiv ((Q \land \neg R) \land \neg P) \lor ((Q \land \neg R) \land Q)$$
$$\equiv ((Q \land \neg R) \land \neg P) \lor (Q \land (Q \land \neg R))$$
$$\equiv ((Q \land \neg R) \land \neg P) \lor ((Q \land Q) \land \neg R)$$
$$\equiv ((Q \land \neg R) \land \neg P) \lor (Q \land \neg R)$$

bruker $\neg (A \to B) \equiv (A \land \neg B)$

$$\neg (A \to B) \equiv (A \land \neg B)$$
$$(A \to B) \equiv (\neg A \lor B)$$
$$(A \land B) \equiv (B \land A)$$
$$(A \land (B \lor C)) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$(A \land B) \equiv (B \land A)$$
$$(A \land B) \land C \equiv A \land (B \land C)$$
$$(A \land A) \equiv A$$

…og videre til *full disjunktiv normalform*…

$$((Q \land \neg R) \land \neg P) \lor (Q \land \neg R)$$

$$A \equiv (A \land true)$$

$$\equiv ((Q \land \neg R) \land \neg P) \lor ((Q \land \neg R) \land true)$$

$$true \equiv (A \lor \neg A)$$

$$\equiv ((Q \land \neg R) \land \neg P) \lor ((Q \land \neg R) \land (P \lor \neg P))$$

$$(A \land (B \lor C)) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$

$$\equiv ((Q \land \neg R) \land \neg P) \lor (((Q \land \neg R) \land P) \lor ((Q \land \neg R) \land \neg P))$$

$$\equiv ((Q \land \neg R) \land P) \lor ((Q \land \neg R) \land \neg P)$$

FULL DISJUNKTIV NORMALFORM