

$A \wedge \neg A \rightarrow \text{false}$

# $A \wedge \neg A \rightarrow \text{false}$

1

 $A \wedge \neg A$ 

P

$A \wedge \neg A \rightarrow \text{false}$ 

1	$A \wedge \neg A$	P
2	$A$	1,Simp

$A \wedge \neg A \rightarrow \text{false}$ 

1	$A \wedge \neg A$	P
2	$A$	1,Simp
3	$\neg A$	1,Simp

$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$ 

1	$A \wedge \neg A$	P
2	$A$	1,Simp
3	$\neg A$	1,Simp
4	$\mathbf{false} \vee A$	2,Add

$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$ 

1	$A \wedge \neg A$	P
2	$A$	1,Simp
3	$\neg A$	1,Simp
4	$\mathbf{false} \vee A$	2,Add
5	$\mathbf{false}$	4,3,DS

$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$ 

1	$A \wedge \neg A$	P
2	$A$	1,Simp
3	$\neg A$	1,Simp
4	$\mathbf{false} \vee A$	2,Add
5	$\mathbf{false}$	4,3,DS
6	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	1,5,CP

$A \wedge \neg A \rightarrow \text{false}$ 

1	$A \wedge \neg A$	P	1
2	$A$	1,Simp	1
3	$\neg A$	1,Simp	1
4	$\text{false} \vee A$	2,Add	1
5	$\text{false}$	4,3,DS	1
6	$A \wedge \neg A \rightarrow \text{false}$	1,5,CP	



$A \rightarrow A$

$$A \rightarrow A$$

1

A P

$A \rightarrow A$ 

1	$A$	$P$
2	$A \rightarrow A$	1,1,CP

$A \rightarrow A$ 

1		$A$	$P$	1
2	$A \rightarrow A$		$1,1,CP$	

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

1

 $\neg\neg A$ 

P

1

$\neg\neg A \rightarrow A$ 

1	$\neg\neg A$	P	1
2	$A \vee \neg A$	XM	

$\neg\neg A \rightarrow A$ 

1	$\neg\neg A$	P	1
2	$A \vee \neg A$	XM	
3	$A$	2,1,DS	1



$\neg\neg A \rightarrow A$ 

1	$\neg\neg A$	P	1
2	$A \vee \neg A$	XM	
3	$A$	2,1,DS	1
4	$\neg\neg A \rightarrow A$	1,3,CP	



1

 $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ 

T

$$1 \quad \neg\neg A \rightarrow \neg\neg A \quad T$$

$$2 \quad A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false} \quad T$$

1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
3	$A$	P	3

1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
3	$A$	P	3
4	$\neg A$	P	4

1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
3	$A$	P	3
4	$\neg A$	P	4
5	$A \wedge \neg A$	3,4,Conj	3,4

1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
3	$A$	P	3
4	$\neg A$	P	4
5	$A \wedge \neg A$	3,4,Conj	3,4
6	$\mathbf{false}$	2,5,MP	3,4



1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
3	$A$	P	3
4	$\neg A$	P	4
5	$A \wedge \neg A$	3,4,Conj	3,4
6	$\mathbf{false}$	2,5,MP	3,4
7	$\neg\neg A$	6,FE	3,4

1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
3	$A$	P	3
4	$\neg A$	P	4
5	$A \wedge \neg A$	3,4,Conj	3,4
6	$\mathbf{false}$	2,5,MP	3,4
7	$\neg\neg A$	6,FE	3,4
8	$\neg A \rightarrow \neg\neg A$	4,7,CP	3

1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
3	$A$	P	3
4	$\neg A$	P	4
5	$A \wedge \neg A$	3,4,Conj	3,4
6	$\mathbf{false}$	2,5,MP	3,4
7	$\neg\neg A$	6,FE	3,4
8	$\neg A \rightarrow \neg\neg A$	4,7,CP	3
9	$\neg A \vee \neg\neg A$	XM	

1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
3	$A$	P	3
4	$\neg A$	P	4
5	$A \wedge \neg A$	3,4,Conj	3,4
6	$\mathbf{false}$	2,5,MP	3,4
7	$\neg\neg A$	6,FE	3,4
8	$\neg A \rightarrow \neg\neg A$	4,7,CP	3
9	$\neg A \vee \neg\neg A$	XM	
10	$\neg\neg A \vee \neg\neg A$	9,8,1,CD	3

1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
3	$A$	P	3
4	$\neg A$	P	4
5	$A \wedge \neg A$	3,4,Conj	3,4
6	$\mathbf{false}$	2,5,MP	3,4
7	$\neg\neg A$	6,FE	3,4
8	$\neg A \rightarrow \neg\neg A$	4,7,CP	3
9	$\neg A \vee \neg\neg A$	XM	
10	$\neg\neg A \vee \neg\neg A$	9,8,1,CD	3
11	$\neg\neg A$	10,Contr	3

1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
3	$A$	P	3
4	$\neg A$	P	4
5	$A \wedge \neg A$	3,4,Conj	3,4
6	$\mathbf{false}$	2,5,MP	3,4
7	$\neg\neg A$	6,FE	3,4
8	$\neg A \rightarrow \neg\neg A$	4,7,CP	3
9	$\neg A \vee \neg\neg A$	XM	
10	$\neg\neg A \vee \neg\neg A$	9,8,1,CD	3
11	$\neg\neg A$	10,Contr	3
12	$A \rightarrow \neg\neg A$	3,11,CP	

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

1

 $A \rightarrow B$ 

P

1



$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

1	$A \rightarrow B$	P	1
2	$\neg A \rightarrow B$	P	2

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

1	$A \rightarrow B$	P	1
2	$\neg A \rightarrow B$	P	2
3	$A \vee \neg A$	XM	

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

1	$A \rightarrow B$	P	1
2	$\neg A \rightarrow B$	P	2
3	$A \vee \neg A$	XM	
4	$B \vee B$	3,1,2 CD	1,2

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

1	$A \rightarrow B$	P	1
2	$\neg A \rightarrow B$	P	2
3	$A \vee \neg A$	XM	
4	$B \vee B$	3,1,2 CD	1,2
5	$B$	4,Contr	1,2

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

1	$A \rightarrow B$	P	1
2	$\neg A \rightarrow B$	P	2
3	$A \vee \neg A$	XM	
4	$B \vee B$	3,1,2 CD	1,2
5	$B$	4,Contr	1,2
6	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow B$	2,5,CP	1

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

1	$A \rightarrow B$	P	1
2	$\neg A \rightarrow B$	P	2
3	$A \vee \neg A$	XM	
4	$B \vee B$	3,1,2 CD	1,2
5	$B$	4,Contr	1,2
6	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow B$	2,5,CP	1
7	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$	1,6,CP	

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

1

A

P

1



$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

1	$A$	P	1
2	$B$	P	2

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

1	$A$	P	1
2	$B$	P	2
3	$A \wedge B$	1,2,Conj	1,2

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

1	$A$	P	1
2	$B$	P	2
3	$A \wedge B$	1,2, Conj	1,2
4	$B \rightarrow (A \wedge B)$	2,3 CP	1

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

1	$A$	P	1
2	$B$	P	2
3	$A \wedge B$	1,2,Conj	1,2
4	$B \rightarrow (A \wedge B)$	2,3 CP	1
5	$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$	1,4,CP	

$$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

$$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

1

 $A \wedge B$ 

P

1

$$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

1	$A \wedge B$	P	1
2	$A$	1,Simp	1

$$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

1	$A \wedge B$	P	1
2	$A$	1,Simp	1
3	$A \wedge B \rightarrow A$	1,2,CP	



$$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

1	$A \wedge B$	P	1
2	$A$	1,Simp	1
3	$A \wedge B \rightarrow A$	1,2,CP	
4	$\neg A$	P	2

$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$ 

1	$A \wedge B$	P	1
2	$A$	1,Simp	1
3	$A \wedge B \rightarrow A$	1,2,CP	
4	$\neg A$	P	2
5	$\neg(A \wedge B)$	3,4,MT	2

$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$ 

1	$A \wedge B$	P	1
2	$A$	1,Simp	1
3	$A \wedge B \rightarrow A$	1,2,CP	
4	$\neg A$	P	2
5	$\neg(A \wedge B)$	3,4,MT	2
6	$\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$	1,5,CP	

$$\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

$$\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

1

 $A \wedge B$ 

P

1

$$\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

1	$A \wedge B$	P	1
2	$B$	1,Simp	1

$$\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

1	$A \wedge B$	P	1
2	$B$	1,Simp	1
3	$A \wedge B \rightarrow B$	1,2,CP	

$$\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

1	$A \wedge B$	P	1
2	$B$	1,Simp	1
3	$A \wedge B \rightarrow B$	1,2,CP	
4	$\neg B$	P	4



$$\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

1	$A \wedge B$	P	1
2	$B$	1,Simp	1
3	$A \wedge B \rightarrow B$	1,2,CP	
4	$\neg B$	P	4
5	$\neg(A \wedge B)$	3,4,MT	4

$\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$ 

1	$A \wedge B$	P	1
2	$B$	1,Simp	1
3	$A \wedge B \rightarrow B$	1,2,CP	
4	$\neg B$	P	4
5	$\neg(A \wedge B)$	3,4,MT	4
6	$\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$	1,5,CP	

# true

# true

1      **true**      Tl

¬false

# $\neg$ false

1       $\neg$ false  $\rightarrow$   $\neg$ false      T

$\neg$ false

1	$\neg$ <b>false</b> $\rightarrow$ $\neg$ <b>false</b>	T	
2	<b>false</b>	P	2

# $\neg$ false

1	$\neg$ <b>false</b> $\rightarrow$ $\neg$ <b>false</b>	T	
2	<b>false</b>	P	2
3	$\neg$ <b>false</b>	2,FE	2



$\neg$ false

1	$\neg$ false $\rightarrow$ $\neg$ false	T	
2	false	P	2
3	$\neg$ false	2,FE	2
4	false $\rightarrow$ $\neg$ false	2,3,CP	

$\neg$ false

1	$\neg$ <b>false</b> $\rightarrow$ $\neg$ <b>false</b>	T	
2	<b>false</b>	P	2
3	$\neg$ <b>false</b>	2,FE	2
4	<b>false</b> $\rightarrow$ $\neg$ <b>false</b>	2,3,CP	
5	<b>false</b> $\vee$ $\neg$ <b>false</b>	XM	

$\neg$ false

1	$\neg$ <b>false</b> $\rightarrow$ $\neg$ <b>false</b>	T	
2	<b>false</b>	P	2
3	$\neg$ <b>false</b>	2,FE	2
4	<b>false</b> $\rightarrow$ $\neg$ <b>false</b>	2,3,CP	
5	<b>false</b> $\vee$ $\neg$ <b>false</b>	XM	
6	$\neg$ <b>false</b> $\vee$ $\neg$ <b>false</b>	5,4,1,CD	

$\neg$ false

1	$\neg$ <b>false</b> $\rightarrow$ $\neg$ <b>false</b>	T	
2	<b>false</b>	P	2
3	$\neg$ <b>false</b>	2,FE	2
4	<b>false</b> $\rightarrow$ $\neg$ <b>false</b>	2,3,CP	
5	<b>false</b> $\vee$ $\neg$ <b>false</b>	XM	
6	$\neg$ <b>false</b> $\vee$ $\neg$ <b>false</b>	5,4,1,CD	
7	$\neg$ <b>false</b>	6,Contr	

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$1 \quad A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false} \quad T$$

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

1	$A \wedge \neg A \rightarrow$ <b>false</b>	T	
2	$\neg A$	P	2

$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 

1	$A \wedge \neg A \rightarrow$ <b>false</b>	T	
2	$\neg A$	P	2
3	$A$	P	3



$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 

1	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
2	$\neg A$	P	2
3	$A$	P	3
4	$A \wedge \neg A$	3,2,Conj	2,3

$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 

1	$A \wedge \neg A \rightarrow$ <b>false</b>	T	
2	$\neg A$	P	2
3	$A$	P	3
4	$A \wedge \neg A$	3,2,Conj	2,3
5	<b>false</b>	1,4,MP	2,3

$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 

1	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
2	$\neg A$	P	2
3	$A$	P	3
4	$A \wedge \neg A$	3,2,Conj	2,3
5	$\mathbf{false}$	1,4,MP	2,3
6	$B$	5,FE	2,3

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

1	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
2	$\neg A$	P	2
3	$A$	P	3
4	$A \wedge \neg A$	3,2,Conj	2,3
5	$\mathbf{false}$	1,4,MP	2,3
6	$B$	5,FE	2,3
7	$A \rightarrow B$	3,6,CP	2

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

1	$A \wedge \neg A \rightarrow \mathbf{false}$	T	
2	$\neg A$	P	2
3	$A$	P	3
4	$A \wedge \neg A$	3,2,Conj	2,3
5	$\mathbf{false}$	1,4,MP	2,3
6	$B$	5,FE	2,3
7	$A \rightarrow B$	3,6,CP	2
8	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	2,7,CP	

$$B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

1

 $B$ 

P

1

$$B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

1	$B$	P	1
2	$A$	P	2



$$B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

1	$B$	P	1
2	$A$	P	2
3	$B \vee B$	1,Add	1

$$B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

1	$B$	P	1
2	$A$	P	2
3	$B \vee B$	1,Add	1
4	$B$	3,Contr	1

$$B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

1	$B$	P	1
2	$A$	P	2
3	$B \vee B$	1,Add	1
4	$B$	3,Contr	1
5	$A \rightarrow B$	2,4,CP	1

$$B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

1	$B$	P	1
2	$A$	P	2
3	$B \vee B$	1,Add	1
4	$B$	3,Contr	1
5	$A \rightarrow B$	2,4,CP	1
6	$B \rightarrow (A \rightarrow B)$	1,5,CP	

$$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

$$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

1

 $A$ 

P

1

$$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

1	$A$	P	1
2	$A \rightarrow B$	P	2

$$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

1	$A$	P	1
2	$A \rightarrow B$	P	2
3	$B$	MP	1,2



$$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

1	$A$	P	1
2	$A \rightarrow B$	P	2
3	$B$	MP	1,2
4	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	2,3,CP	1

$$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

1	$A$	P	1
2	$A \rightarrow B$	P	2
3	$B$	MP	1,2
4	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	2,3,CP	1
5	$\neg B$	P	5

$$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

1	$A$	P	1
2	$A \rightarrow B$	P	2
3	$B$	MP	1,2
4	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	2,3,CP	1
5	$\neg B$	P	5
6	$\neg(A \rightarrow B)$	4,5,MT	1,5

$$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

1	$A$	P	1
2	$A \rightarrow B$	P	2
3	$B$	MP	1,2
4	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	2,3,CP	1
5	$\neg B$	P	5
6	$\neg(A \rightarrow B)$	4,5,MT	1,5
7	$\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	5,6,CP	1

$$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$$

1	$A$	P	1
2	$A \rightarrow B$	P	2
3	$B$	MP	1,2
4	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	2,3,CP	1
5	$\neg B$	P	5
6	$\neg(A \rightarrow B)$	4,5,MT	1,5
7	$\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	5,6,CP	1
8	$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$	1,7,CP	

$$A \rightarrow (A \vee B)$$

$$A \rightarrow (A \vee B)$$

1

A

P

1

$$A \rightarrow (A \vee B)$$

1	$A$	P	1
2	$A \vee B$	1, Add	1



$A \rightarrow (A \vee B)$ 

1	$A$	P	1
2	$A \vee B$	1,Add	1
3	$A \rightarrow (A \vee B)$	1,2,CP	

$$B \rightarrow (A \vee B)$$

$$B \rightarrow (A \vee B)$$

1

 $B$ 

P

1

$$B \rightarrow (A \vee B)$$

1	$B$	P	1
2	$A \vee B$	1, Add	1

$B \rightarrow (A \vee B)$ 

1	$B$	P	1
2	$A \vee B$	1,Add	1
3	$B \rightarrow (A \vee B)$	1,2,CP	

$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$$

$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$$

1

 $\neg A$ 

P

1

$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$$

1	$\neg A$	P	1
2	$A \vee B$	P	2



$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$$

1	$\neg A$	P	1
2	$A \vee B$	P	2
3	$B$	2,1,DS	1,2

$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$$

1	$\neg A$	P	1
2	$A \vee B$	P	2
3	$B$	2,1,DS	1,2
4	$(A \vee B) \rightarrow B$	2,3,CP	1

$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$$

1	$\neg A$	P	1
2	$A \vee B$	P	2
3	$B$	2,1,DS	1,2
4	$(A \vee B) \rightarrow B$	2,3,CP	1
5	$\neg B$	P	5

$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$$

1	$\neg A$	P	1
2	$A \vee B$	P	2
3	$B$	2,1,DS	1,2
4	$(A \vee B) \rightarrow B$	2,3,CP	1
5	$\neg B$	P	5
6	$\neg(A \vee B)$	4,5,MT	1,5

$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$$

1	$\neg A$	P	1
2	$A \vee B$	P	2
3	$B$	2,1,DS	1,2
4	$(A \vee B) \rightarrow B$	2,3,CP	1
5	$\neg B$	P	5
6	$\neg(A \vee B)$	4,5,MT	1,5
7	$\neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$	5,6,CP	1

$$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$$

1	$\neg A$	P	1
2	$A \vee B$	P	2
3	$B$	2,1,DS	1,2
4	$(A \vee B) \rightarrow B$	2,3,CP	1
5	$\neg B$	P	5
6	$\neg(A \vee B)$	4,5,MT	1,5
7	$\neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$	5,6,CP	1
8	$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \vee B))$	1,7,CP	