UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MOD 190 — Numeriske Beregninger
Eksamensdag:	2 juni 2003
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 10 delspørsmål vektlegges likt.

Oppgave 1 Numerisk integrasjon

1a

Gitt kvadraturregelen

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k),$$

for en vilkårlig funksjon f definert på intervallet $[a, b]$, finn en tilsvarende kvadraturregel

$$\int_c^d g(y)\,dy \approx \sum_{k=1}^{n} v_k g(y_k),$$

for en funksjon g definert på et vilkårlig intervall $[c, d]$, ved å finne vektene v_k og punktene y_k uttrykt ved x_k og w_k.

1b

Gitt at Gausskvadraturregelen

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

er eksakt for alle polynomer av grad ≤ 3. Finn en to punkts formel

$$\int_0^1 f(x)dx \approx G(f) = v_1 f(y_1) + v_2 f(y_2)$$

(Fortsettes på side 2.)

som er eksakt for alle polynomer av grad ≤ 3. Utled deretter en 4-punkts Gausskvadraturregel for

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy$$

som er eksakt for alle polynomer på formen

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j.$$

Hint: Forklar hvorfor

$$\int_0^1 \int_0^1 x^i y^j\, dx\, dy = G(x^i) G(y^j)$$

for $0 \leq i, j \leq 3$.

Oppgave 2 Ligningsystem

Vi skal løse det 2-punkt randverdi-problemet

$$-y''(x) = f(x) \tag{1}$$

for x i intervallet $[0, 1]$, med randbetingelsene $y(0) = 1$ og $y(1) = 3$, og hvor $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ er en gitt funksjon. For et gitt heltall n, la $h = 1/n$ og $x_k = kh$, for $k = 0, 1, \ldots, n$.

2a

Ved å bruke Taylor-rekker, vis at

$$\frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2} = y''(x_k) + O(h^2). \tag{2}$$

2b

Anta at vi setter $u_0 = 1$ og $u_n = 3$ og vi lar $u_1, \ldots, u_{n-1}$ være løsningene til ligningene

$$-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1} = h^2 f(x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Hvorfor er det rimelig å forvente at $u_k \approx y(x_k)$?

Uttrykk ligningene (3) i vektor or matrise form. Hvilken egenskap har matrisen som bør utnyttes når man løser ligningsystemet?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3 En ikke-lineær ligning

3a

Vi skal løse ligningen

$$f(x) = x^3 - V = 0, \tag{4}$$

hvor $V > 0$ er en gitt konstant. Hvis $\{x_k\}$ er følgen generert ved Newton's metode, vis for $k = 0, 1, 2, \ldots$, at

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_k + \frac{V}{x_k^2}\right), \tag{5}$$

og gi en geometrisk tolkning av ligning (4) og iterasjonen (5).

3b

Hvis $x_* > 0$ er roten til f i (4), og $e_k = x_k - x_*$, vis at

$$e_{k+1} = e_k^2\left(\frac{2x_k + x_*}{3x_k^2}\right). \tag{6}$$

3c

Anta nå at vi reduserer 'søke-rommet' ved å anta at

$$1/8 \leq V < 1. \tag{7}$$

La h være funksjonen gitt ved $h(V) = V^{1/3}$. Ved å finne den lineære interpolanten g til h, bestemt av betingelsene $g(1) = h(1)$ og $g'(1) = h'(1)$, forklar hvorfor

$$x_0 = \frac{V+2}{3} \tag{8}$$

er et rimelig startverdi til skjemaet (5). Vis at den største mulige feilen $|e_0|$ i denne startverdien er $5/24$.

3d

Med startverdien x_0 i (8) vis følgende egenskaper:

(a) $x_* \leq x_0 \leq 1$,

(b) $x_{k+1} \geq x_*$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$,

(c) $x_{k+1} \leq x_k$, for $k = 0, 1, 2, \ldots$,

og dermed at

$$1/2 \leq x_* \leq \cdots \leq x_1 \leq x_0 \leq 1.$$

(Fortsettes på side 4.)

3e

Vis for $k = 0, 1, 2, \ldots$, at

$$|e_{k+1}| \leq 2|e_k|,$$

og dermed at

$$|2e_k| \leq |2e_{k-1}|^2 \leq \ldots \leq |2e_0|^{2^k},$$

og estimer antall interasjoner k som må brukes for å garantere en feil som er innen 10^{-16}.

3f

Du skal nå bruke estimatet fra forrige oppgave til å skrive en MATLAB funksjon som til et vilkårlig gitt positivt tall V finner tredjeroten $V^{1/3} \in \mathbb{R}$ med en feil $\leq 10^{-16}$. Forklar først hvordan du kan finne et entydig heltall n og et reelt tall m, med $1/8 \leq m < 1$, slik at $V = 8^n m$, og dermed $V^{1/3} = 2^n m^{1/3}$.

Lykke til!